PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 6
Strani 321–326

Vilko Domajnko:

ARITMETIKA S KVADRATI

Ključne besede: matematika, algebra, binarne operacije, kvadrati, seštevanje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1238-Domajnko.pdf

MATEMATIKA

ARITMETIKA S KVADRATI

Geometrijskih likov ponavadi ne seštevamo, vsaj v običajnem smislu ne. V elementarni matematiki uporabljamo operacijo seštevanja največkrat le v številskih množicah; čeprav smo sicer navajeni seštevati tudi vektorje, funkcije, izraze, ...

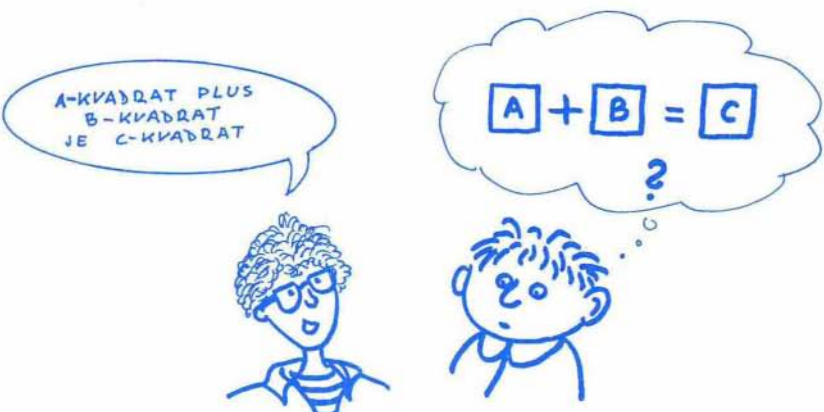
Toda spomnimo se samo, kako velikokrat na hitro povemo Pitagorov izrek:

a kvadrat plus b kvadrat je c kvadrat.

Mar ta stavek ne govori o natanko tistem, kar smo v uvodnem odstavku zanikali – o seštevanju kvadratov? In tudi nekoliko izboljšana "ljudska" verzija izreka ni bistveno drugačna:

Vsota kvadratov nad katetama je enaka kvadratu nad hipotenuzo.

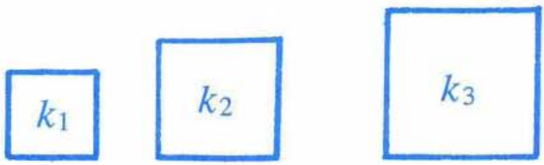
Pravzaprav le še določneje govori o – seštevanju kvadratov!



Kajpak vemo, da je posredi nesporazum, ki je bolj ali manj jezikovne narave. Po njegovi zaslugi se samo zdi, kakor da seštevamo in primerjamo geometrijske like, čeprav v resnici seštevamo in primerjamo zgolj njihove ploščine.

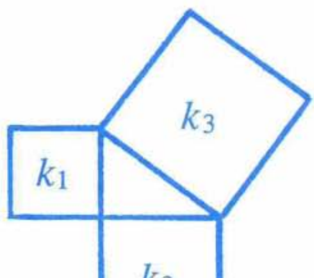
Pa izkoristimo ta jezikovni zaplet in definirajmo seštevanje kvadratov. Označimo s K množico vseh kvadratov v ravnini in se domenimo, da bo vsota *vsota* $k_1 \oplus k_2$ poljubno izbranih kvadratov k_1 in k_2 iz K spet kvadrat – in sicer tak, čigar številska vrednost ploščine je vsota številskih vrednosti ploščin kvadratov k_1 in k_2:

$$k_1 \oplus k_2 = k_3 \iff \mathrm{pl}(k_1) + \mathrm{pl}(k_2) = \mathrm{pl}(k_3) \qquad (k_1, k_2, k_3 \in K).$$



Pitagorov izrek nam pove, da je seštevanje kvadratov dokaj preprosto, če se ga lotimo zgolj po aritmetični plati – s pomočjo dolžin stranic kvadratov k_1 in k_2 izračunamo stranico njune vsote k_3. Tako je naša naloga že rešena. Nekoliko več truda pa zahteva geometrijski pristop po konstrukcijski poti. V tem primeru sta kvadrata k_1 in k_2 podana kot lika na ravnini, njuno vsoto pa smemo, kot običajno, poiskati le s pomočjo geometrijskega orodja. V nadaljevanju nas bo zanimal predvsem ta način.

Geometrijsko poiščemo vsoto kvadratov najelegantneje seveda s pomočjo *Pitagorovega izreka*. Če torej želimo sešteti par kvadratov, ni treba drugega, kakor konstruirati pravokotni trikotnik, čigar kateti imata dolžini enaki dolžinama njunih stranic. Vsota je potem kvadrat nad hipotenuzo.

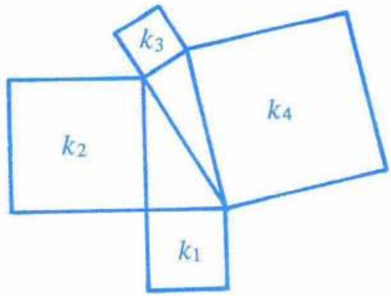


$k_1 \oplus k_2 = k_3$

Definicijo lahko zelo preprosto posplošimo še na seštevanje treh ali več kvadratov. Tudi v tem primeru je rezultat spet kvadrat s ploščino, ki je vsota ploščin posameznih kvadratov:

$$k_1 \oplus k_2 \oplus \ldots \oplus k_n = k_{n+1} \iff \mathrm{pl}(k_1) + \mathrm{pl}(k_2) + \ldots + \mathrm{pl}(k_n) = \mathrm{pl}(k_{n+1})$$
$$(k_1, k_2, \ldots, k_{n+1} \in K).$$

Na srečo je vsota kvadratov asociativna (glej nalogo 3), zato si lahko pri njeni konstrukciji pomagamo kar z zaporednim seštevanjem posameznih kvadratov. Tri kvadrate na primer seštejemo tako, kakor kaže risba na desni.

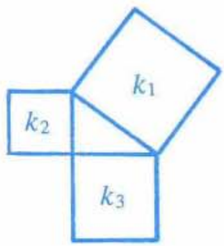


$k_1 \oplus k_2 \oplus k_3 = k_4$

Podobno lahko definiramo tudi *razliko* kvadratov $k_1 \Delta k_2$. Ta naj bo tak kvadrat, katerega ploščina je (številska) razlika ploščin danih kvadratov:

$$k_1 \Delta k_2 = k_3 \iff \mathrm{pl}(k_1) - \mathrm{pl}(k_2) = \mathrm{pl}(k_3) \qquad (k_1, k_2, k_3, \in K)$$

Zgornja definicija je očitno smiselna samo v primeru, ko je $\mathrm{pl}(k_1) \geq$ $\geq \mathrm{pl}(k_2)$. Pri konstrukciji razlike kvadratov se spet opremo na Pitagorov izrek. Konstruirati moramo pravokotni trikotnik z dano hipotenuzo (stranica prvega kvadrata) in z eno izmed katet (stranica drugega kvadrata). Preostala kateta je tedaj stranica razlike.

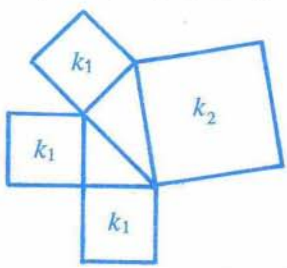


$k_1 \Delta k_2 = k_3$

Oglejmo si naposled še *množenje kvadrata s številom*. Definiramo ga takole: produkt števila a in kvadrata k_1 je tak kvadrat k_2, katerega ploščina je a-kratnik ploščine kvadrata k_1:

$$a \otimes k_1 = k_2 \iff a \cdot \mathrm{pl}(k_1) = \mathrm{pl}(k_2) \qquad (a \in \mathbb{R};\ k_1, k_2 \in K).$$

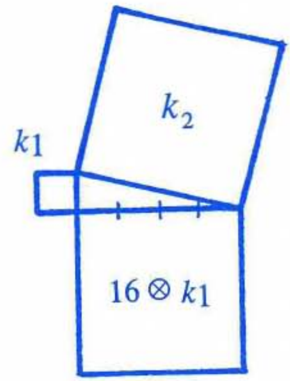
Množenje, ki smo si ga zamislili, je dokaj preprosto, če je število a naravno. V tem primeru si namreč lahko pomagamo kar s seštevanjem kvadratov, ki pa ga že poznamo – in to celo za primer poljubnega števila sumandov. Risba na desni prikazuje množenje kvadrata s 3.



$3 \otimes k_1 = k_1 \oplus k_1 \oplus k_1 = k_2$

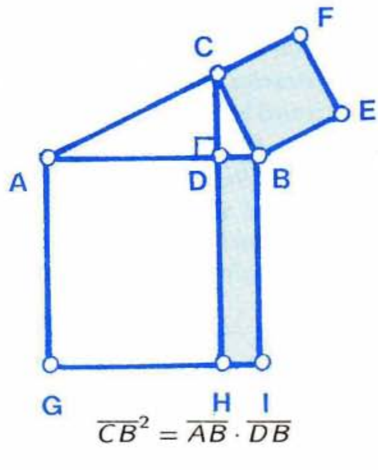
Pri množenju z nekoliko večjimi števili pa bi bil opisani postopek nedvomno precej neroden. Zato si v teh primerih pomagamo drugače. Oglejmo si, kako steče takšno množenje v primeru, ko je $a = 17$:

$$17 \otimes k_1 = (16 + 1) \otimes k_1 = (16 \otimes k_1) \oplus k_1 = k_2 .$$



$16 \otimes k_1$ je kvadrat, ki ima 16-krat večjo ploščino od kvadrata k_1. Njegova stranica je torej 4-krat daljša od stranice kvadrata k_1. Torej pri danem kvadratu k_1 konstruiramo njegov 17-kratnik tako, kakor kaže risba na desni.

Za konec opišimo še množenje kvadratov z racionalnimi števili oblike $a = \frac{p}{q}$, kjer sta p in q poljubni naravni števili in je $p \leq q$. V tem primeru se namesto na Pitagorov izrek raje opremo na prav tako dobro znani *Evklidov izrek* v pravokotnem trikotniku. Njegovo sporočilo preberemo na desni risbi.



Za ponazoritev te metode si oglejmo konstrukcijo produkta $\frac{1}{5} \otimes k$, kjer je k dani kvadrat. Naj bo na risbi na desni $GIBA$ dani kvadrat k. Na stranici AB konstruiramo točko D tako, da je $\overline{DB} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$. Tedaj je očitno tudi ploščina pravokotnika $HIBD$ enaka petini ploščine kvadrata $GIBA$. S pomočjo Talesovega izreka, da je obodni kot nad premerom pravi kot, konstruiramo pravokotni trikotnik $\triangle ABC$, kjer je DB pravokotna projekcija katete CB na hipotenuzo AB. Kvadrat s stranico CB je tedaj $\frac{1}{5}$-kratnik kvadrata k.

Naloge

1. Na ravnini izberi kvadrata k_1 in k_2. Zatem konstruiraj:

a) $k_1 \oplus k_2$, b) $k_1 \Delta k_2$ (ali $k_2 \Delta k_1$),
c) $(2 \otimes k_1) \oplus (3 \otimes k_2)$, d) $6 \otimes k_1$,
e) $\frac{1}{3} \otimes k_1$, f) $\frac{5}{6} \otimes k_1$.

2. Na ravnini izberi kvadrate k_1, k_2 in k_3 tako, da boš lahko konstruiral tudi kvadrata $k_1 \oplus k_2 \oplus k_3$ in $k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$.

3. Dokaži, da je vsota kvadratov asociativna; za poljubno trojico kvadratov k_1, k_2 in k_3 torej velja:

$$(k_1 \oplus k_2) \oplus k_3 = k_1 \oplus (k_2 \oplus k_3) = k_1 \oplus k_2 \oplus k_3 .$$

4. Dokaži, da je vsota kvadratov tudi komutativna; za poljubno izbran par kvadratov k_1 in k_2 torej velja:

$$k_1 \oplus k_2 = k_2 \oplus k_1 .$$

5. Kaj lahko rečeš o asociativnosti in kaj o komutativnosti razlike kvadratov?

6. Izberi na ravnini kvadrat k. Zatem konstruiraj:
a) $\sqrt{3} \otimes k$,
b) $\sqrt{n} \otimes k$, $(n \in \mathbb{N})$.

7. Premisli, kako bi množil kvadrate s poljubnim nenegativnim realnim številom.

8. Posplošena verzija Pitagorovega izreka pravi:

V pravokotnem trikotniku je za vsako naravno število n $(n \geq 3)$ vsota ploščin pravilnih n-kotnikov nad katetama enaka ploščini pravilnega n-kotnika nad hipotenuzo.

Na naslednji strani je prikazan primer za $n = 6$.