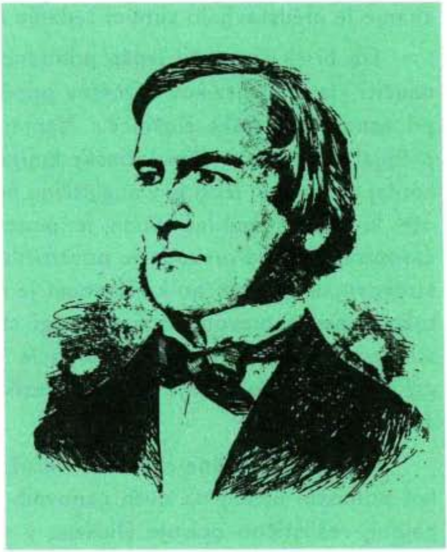
GEORGE BOOLE – ob stotridesetletnici smrti



V devetnajstem stoletju je matematika doživela nesluteni razmah in napredek. V nasprotju s prejšnjim stoletjem, ko so večji del matematike ustvarili Francozi (**D'Alembert**, **Fourier**, **Lagrange**, **Laplace**, **Legendre**) in Švicarji (**Euler**), so sedaj z velikim uspehom matematiko razvijali skoraj povsod po svetu (**Boole**, **Hamilton** in **Cayley** v Veliki Britaniji; **Bolyai** na Madžarskem; **Abel** na Norveškem, **Dirichlet**, **Gauss** in **Jacobi** v Nemčiji, **Lobačevski** v Rusiji in **Peirce** v Združenih državah Amerike). Napredek je bil dodatno pospešen z ustanavljanjem matematičnih družb (*London Mathematical Society* v Angliji in *La Société mathématique de France* v Franciji), ki so redno izdajale publikacije s prispevki svojih članov.

Razvoj pa je prinesel tudi nekaj težav. Matematika je postajala vedno bolj okorna in zelo obsežna zgradba. Zato je bilo treba razviti osnovna orodja, ki so omogočila širši in enostavnejši pregled nad celotno snovjo.

Eno od najpomembnejših področij, ki tvorijo temelje matematike, matematično logiko, je začel ustvarjati **George Boole** (1815-1864). Logiko, s katero so špekulirali tedanji filozofi, je s pomočjo matematike očistil in iz nje razvil povsem novo matematično področje. Znani filozof in matematik **Bertrand Russell** (1872-1970) je o njegovem delu dejal: "Čisto matematiko je odkril Boole v delu *The Laws of Thought*, 1854 *(Zakoni mišljenja)*. V njem obravnava formalno logiko, to pa je isto kot matematika sama."

George Boole se je rodil 2. novembra 1815 v Lincolnu v Angliji. Njegov oče je bil nepomemben prodajalec, predstavnik najrevnejšega sloja, ki ga poznamo iz Dickensovih romanov. Zaradi pomanjkanja denarja je moral George obiskovati ljudske šole, v katerih so poleg katekizma otroke večinoma učili le še ponižnosti in poslušnosti. Vendar tudi boljše (in dražje) šole niso bile kaj prida. Mladi gospodiči, aristokracija in sinovi bogatašev so se, za razliko od revnejših vrstnikov, na pamet učili še grške in latinske lekcije. Takšno znanje je predstavljalo simbol tedanje visoke družbe.

Da bi si omogočil lepšo prihodnost, se je George na vsak način hotel naučiti klasičnih jezikov. Očetov prijatelj, lastnik knjigarne, mu je pomagal pri osnovah latinske slovnice. Naprej si je moral George utirati pot sam; prebijal se je skozi težke latinske knjige. Izjemni napori so rodili sadove. Pri komaj dvanajstih letih je v angleščino prepesnil eno od Horacijevih od. Njegov oče, ki sicer ni znal latinščine, je, ponosen na sina, prevod objavil v lokalnem časopisu. Objava prevoda je povzročila pozitivne in negativne odmeve. Neki strokovnjak za klasično književnost je trdil, da dvanajstletni deček ni zmogel tako dobrega prevoda. Spet drugi strokovnjak je prepesnitev raztrgal po strokovni plati. Kritika je Georga le še bolj potisnila v študij latinščine in grščine. Izpiljeno znanje klasičnih jezikov je razvidno iz Boolovih objavljenih del.

Ko so se finančne razmere v družini še poslabšale, se je George zaposlil kot pomožni učitelj na dveh osnovnih šolah. V nevzdržnih razmerah (ki jih najbolj realistično opisuje Dickens v svojem romanu *Nicholas Nickleby*) je zaslužil nekaj denarja, s katerim je podpiral družino. Po štirih letih je začel resno razmišljati o bolj častnem in dobičkonosnem poklicu. Izbiral je lahko med vojaško kariero, pravom in cerkvijo. Kot pripadnik najnižjega sloja si vojaške kariere ni mogel obetati, študij prava pa je bil predrag. V štirih letih študija teologije se je dobro naučil francosko, nemško in italijansko. Zaradi nevzdržnih finančnih razmer doma, svoje šaljive narave, pa tudi zaradi dvomov o duhovniškem poklicu, je študij opustil in odprl lastno privatno šolo.

Svoje učence je moral, poleg drugih znanj, naučiti tudi nekaj matematike. Od matematike je George obvladal le najbolj osnovno računstvo. Tedanji učbeniki so bili slabi in strah vzbujajoči, zato se je lotil tedanjih osnovnih matematičnih knjig. Brez vsake pomoči se je prebil skozi Laplaceovo *Mécanique céleste (Nebesna mehanika)* in Lagrangeovo *Mécanique analitique (Analitična mehanika)*. Pri študiju je naletel na veliko problemov in odprtih vprašanj, največ na področju variacijskega računa. Nekaj odprtih vprašanj mu je uspelo rešiti. Svoja prva dela je objavil v časopisu *The Cambridge Mathematical Journal*, ki ga je urejal škotski matematik **D. F. Gregory**. S tega področja je kasneje objavil še dve izvrstni deli, *Differential Equations (Diferencialne enačbe)* leta 1859 in *Finite Differences (Končne diference)* leta 1860, ki obravnavata diferencialne enačbe in diferenčni račun.

Prelomnico v Boolovem raziskovanju predstavlja leto 1830, ko je **George Peacock** (1791-1858) objavil delo *Treatise on Algebra (Predavanja o algebri)*, **Duncan Farquharson** pa delo *On the Real Nature of Symbolical Algebra (O naravi simbolične algebre)*. Oba avtorja sta na dotlej znane računske zakone komutativnosti in distributivnosti

$$x + y = y + x, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

pogledala iz povsem drugega zornega kota. Oznake x, y in z jima niso predstavljale samo konkretnih številk, znaka $+$ in $\cdot$ pa ne le običajnih računskih operacij. Na oznake x, y in z sta gledala kot na poljubne simbole, znaka $+$ in $\cdot$ pa sta služila le za združevanje teh simbolov. Podobni pogledi so danes skoraj do popolnosti obdelani v teoriji formalnih jezikov. Tudi v slovenskem jeziku je napisana izvrstna knjiga prof. Nika Prijatelja, *Osnove matematične logike 2*, ki pa je zaradi zahtevnosti primerna le za bolj podučene bralce.

Obogaten z novim pogledom na aritmetiko, je Boole leta 1848 objavil knjižico *The Mathematical Analysis of Logic (Matematična analiza logike)*, v kateri je logične probleme, do tedaj v strogi domeni filozofije, reševal s pomočjo metod iz matematične analize. Po objavi so ga kolegi matematiki vzpodbujali, naj gre v Cambridge dopolnit svoje matematično znanje. Ker so bili starši še vedno odvisni od njegove finančne podpore, si kaj takega ni mogel privoščiti, zato je nadaljeval s poučevanjem na svoji šoli. Na srečo je leta 1849 dobil mesto profesorja matematike na Queen's Collegeu na Irskem. Tam je lahko razširjal svoje znanje, hkrati pa imel dovolj možnosti in časa za nadaljnje raziskave.

Čez šest let je objavil že omenjeno, originalno in mogočno knjigo *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities (Raziskava zakonov mišljenja, na katerih temeljita matematični teoriji logike in verjetnosti)*. Z njo logične probleme prevede na obravnavo algebrskih struktur posebne vrste, ki si jih bomo ogledali kasneje. Del, ki se ukvarja z verjetnostjo, je osnova današnji aksiomatični zasnovi verjetnostnega računa. Z objavo te knjige je postal znan in spoštovan matematik tistega časa.

Pri štiridesetih letih se je poročil z nečakinjo profesorja grščine na Queen's Collegeu, Mary Everest, ki je postala njegova zvesta učenka. Ko je Boole pozimi leta 1864 po nekem deževju, premočen do kože, še ves dan predaval, se je hudo prehladil. Prehlad je prerasel v pljučnico, zaradi katere je 8. decembra 1864 tudi umrl.

Mary Everest je po njegovi smrti izdala brošuro *Boolova psihologija*, kjer na osnovi idej iz knjige *The Laws of Thought* razmišlja o humanizaciji vzgoje otrok v tedanjem času. V brošuri je zapisana tudi zanimiva Boolova ideja o izvoru matematičnih idej. Ko se je Boole, star sedemnajst let, sprehajal po polju, se mu je utrnila zanimiva misel. Svet spoznavamo ne samo s pomočjo znanja, pridobljenega z opazovanjem in učenjem, temveč tudi s pomočjo spoznanj, ki izvirajo iz podzavesti.

Na koncu opišimo že omenjeno algebrajsko strukturo, poimenovano po Boolu.

Naj bo $\mathcal{K}$ množica, $+$ in $\cdot$ pa binarni operaciji na njej:

$$\begin{aligned} + &: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \qquad & + &: (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot &: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \qquad & \cdot &: (a, b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Z drugimi besedami to pomeni: Če sta a in b elementa iz $\mathcal{K}$, sta tudi $a + b$ in $a \cdot b$ neka elementa iz $\mathcal{K}$.

Naj veljajo še naslednje zahteve:

1. Obstaja tak element $z \in \mathcal{K}$ (*enota za seštevanje*), da za vse $a \in \mathcal{K}$ velja $a + z = z + a = a$.
2. Obstaja tak element $e \in \mathcal{K}$ (*enota za množenje*), da za vse $a \in \mathcal{K}$ velja $a \cdot e = e \cdot a = a$.
3. Za vse $a, b \in \mathcal{K}$ velja $a + b = b + a$ in $a \cdot b = b \cdot a$ (*komutativnost seštevanja in množenja*).
4. Za vse $a, b, c \in \mathcal{K}$ veljata *distributivnostna zakona*
$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{in} \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$
5. Za vsak element $a \in \mathcal{K}$ obstaja tak $a' \in \mathcal{K}$ (*komplement k a*), da velja $a + a' = e$ in $a \cdot a' = z$.
6. $\mathcal{K}$ vsebuje vsaj dva različna elementa.

Trojki $(\mathcal{K}, +, \cdot)$, ki zadošča navedenim zahtevam, pravimo *Boolova algebra*.

Osnovni zgled Boolove algebre so podmnožice dane (univerzalne) množice $\mathcal{U}$ za operaciji unije in preseka. V tem primeru male tiskane črke predstavljajo množice, znak $+$ unijo množic in znak $\cdot$ presek množic. Hitro lahko preverimo, da veljajo vse zahteve. Za z je treba vzeti prazno množico $\emptyset$, za e univerzalno množico $\mathcal{U}$, za a' pa komplement množice a. Velja tudi nenavadni distributivnostni zakon iz četrte točke, ki se v običajnih oznakah iz teorije množic glasi

$$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) .$$

Drugi zgled je zelo enostavna pascalska struktura. Tisti bralci, ki so se učili programski jezik pascal, zagotovo poznajo poseben tip spremenljivk `boolean`. Boolu v čast nosijo njegovo ime. Te spremenljivke lahko zavzamejo le dve vrednosti: `true` (pravilno) ali `false` (nepravilno). Množenje in seštevanje takih spremenljivk je definirano kot konjunkcija ($\wedge$, logični in) in disjunkcija ($\vee$, logični ali) izjav.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
false	false	false	false
false	true	false	true
true	false	false	true
true	true	true	true

Tabelica seštevanja in množenja v $(\{\mathtt{false}, \mathtt{true}\}, \vee, \wedge)$

Če vzamemo za $\mathcal{K} = \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$, za množenje konjunkcijo $\wedge$ in za seštevanje disjunkcijo $\vee$, s tem ugodimo vsem zahtevam, ki jih predpisujejo zakoni Boolove algebre. Pri tem je $z = \mathtt{false}$, $e = \mathtt{true}$, $\mathtt{true}' = \mathtt{false}$ in $\mathtt{false}' = \mathtt{true}$.

V skušnjavo nas spravlja tudi običajni primer iz aritmetike: $\mathcal{K} = \mathbb{Z}$, pri čemer sta operaciji običajno seštevanje in množenje. Vendar pa prvi distributivnostni zakonu ni izpolnjen, saj je na primer $(1 + 2) \cdot 3 \neq (1 + + 2) \cdot (1 + 3)$.

Uporabnost Boolove algebre se najbolj izkaže pri reševanju logičnih problemov. Najprej je treba problem prevesti na "enačbo", v kateri nastopajo elementi iz $\mathcal{K}$, znak $+$ in znak $\cdot$. Nato skušamo s pomočjo že razvitih algebrajskih metod tako enačbo rešiti. Če nam uspe, s tem hkrati rešimo logični problem.

Marjan Jerman