PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 3
Strani 129–132

Gregor Pavlič:

PASCAL, FIBONACCI IN BOŽIČNO DREVCE

Ključne besede: matematika, teorija števil, kombinatorika, Pascalov trikotnik, Fibonaccijevo zaporedje.

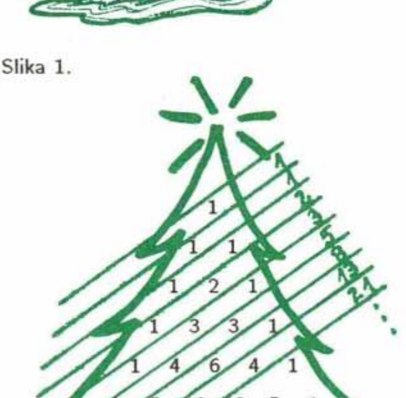
Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1220-Pavlic.pdf

PASCAL, FIBONACCI IN BOŽIČNO DREVCE

V trikotnik razporejenih števil, ki jih poznamo pod imenom Pascalov trikotnik, ni odkril slavni filozof in matematik Blaise Pascal (1623 - 1662), ampak so jih poznali kitajski matematiki že 350 let pred njim. Vprašanje pa je, ali so se zavedali, kaj vse se v trikotniku skriva (slika 1).

Slika 1.

(A) Najprej na hitro ponovimo: Na robu Pascalovega trikotnika so same enice, število, ki ni na robu, pa je vsota svojega levega in desnega soseda v vrstici pred njim (slika 2). Vemo še, da posamezno število lahko tudi izračunamo iz njegovega položaja v trikotniku. V k-ti vrsti je na i-tem mestu število $\binom{k}{i}$; $i = 0, 1, \ldots, k$. Oglejmo si še nekaj zanimivih lastnosti Pascalovega trikotnika. Vsota vseh števil v k-ti vrsti Pascalovega trikotnika je število vseh podmnožic končne množice z močjo k oziroma moč njene potenčne množice:



Slika 2.

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Če pa seštejemo števila iz Pascalovega trikotnika po poševnih vrstah od vrha navzdol, kot kaže slika 2, ostanemo brez besed: Saj to je vendar Fibonaccijevo zaporedje!

Za dokaz tega osupljivega odkritja uporabimo rekurzivno definicijo Fibonaccijevega zaporedja $F(n)$, $n = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{aligned} F(0) &= F(1) = 1, \\ F(n) &= F(n-1) + F(n-2); \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

in eno od lastnosti binomskih simbolov (aditivnost):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Z $S(n)$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ označimo vsoto števil v n-ti poševni vrsti. Res je $S(0) = S(1) = 1$. Dokažimo še rekurzivno formulo. Za sode n gre takole:

$$\begin{aligned} S(2m-1)+&S(2m-2) = \\ = \binom{2m-1}{0}+&\binom{2m-2}{1} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m-1}{m} + \\ &+\binom{2m-2}{0} + \cdots + \binom{m}{m-2} + \binom{m-1}{m-1} = \ldots \end{aligned}$$

$\binom{2m-1}{0}$ zamenjamo z $\binom{2m}{0}$, uporabimo aditivnost binomskih simbolov in dobimo

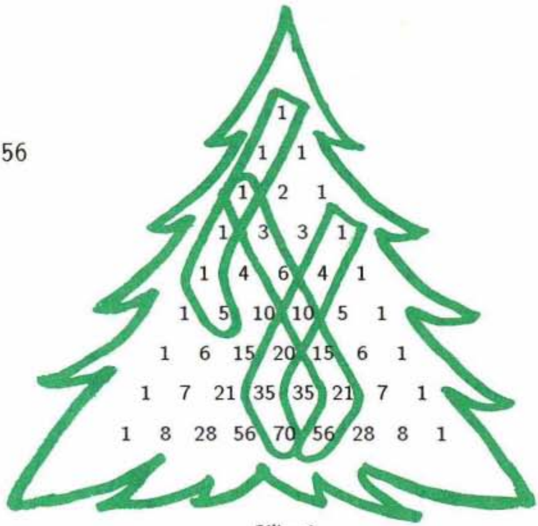
$$\ldots = \binom{2m}{0} + \binom{2m-1}{1} + \cdots + \binom{m+1}{m-1} + \binom{m}{m} = S(2m).$$

Za lihe n ni dokaz nič težji.
Vsote $S(n)$ torej res tvorijo Fibonaccijevo zaporedje.

(B) V anglosaških deželah otroci Božičku ne nastavljajo peharjev ampak velike pisane nogavice. Take "nogavice" najdemo tudi na Pascalovem trikotniku (slika 3).

Nogavica je lahko dolga, kolikor hočemo, le njen zgornji del se mora začeti na robu trikotnika in stopalo mora biti dolgo dve števili, s peto vred. Potem je vsota števil v nogavici enaka številu v prstih stopala.

$1+3+6+10+15+21=56$
$1+1+1+1+1=5$
$1+4+10+20+35=70$



Slika 3.

Za dokaz trditve spet potrebujemo le lastnosti binomskih simbolov. Oglejmo si primer nogavice, ki teče od zgoraj navzdol od leve proti desni. Za drugi primer lahko napravite dokaz sami.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k}{k}=$$

$$=\left[\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}\right]+\cdots+\binom{n+k}{k}=$$

$$=\left[\binom{n+2}{1}+\binom{n+2}{2}\right]+\cdots+\binom{n+k}{k}=$$

$$=\binom{n+3}{3}+\cdots+\binom{n+k}{k}=$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\binom{n+k}{k-1}+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$