PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 2
Strani 80–83

Franc Savnik:

# MNOŽICE IZ RAČUNALNIKA

Ključne besede: matematika, kombinatorika, računalništvo, naravna števila, podmnožice.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1216-Savnik.pdf

## MNOŽICE IZ RAČUNALNIKA

Na stikih med raznorodnimi vedami se že od nekdaj dogajajo posebno zanimive stvari. To velja tudi za znanosti, ki mejijo na matematiko; mednje tradicionalno uvrščajo astronomijo, fiziko in tehniko. V zadnjih nekaj desetletjih pa so začeli matematične metode uporabljati tudi v kemiji, biologiji, jezikoslovju, sociologiji in v številnih drugih znanostih, za katere je pred tem veljalo mnenje, da z matematiko nimajo nobene zveze. Precej zaslug za vstop matematike kot pomožne vede v te znanstvene panoge ima *kombinatorika*, o kateri zgodovina matematike poroča, da ima svoje korenine med ugankami in razvedrilno matematiko, v raznih igrah (tudi tistih za denar), v začetkih verjetnostnega računa in da je nasploh dolgo životarila na meji med znanostjo in razvedrilom.

Dandanes pravimo, da se *kombinatorika ukvarja z vprašanji, ki so povezana z razmeščanjem elementov končnih množic.* Njene rezultate izdatno uporabljajo tudi v računalništvu, saj so kombinatorični algoritmi podlaga številnim računalniškim programom. V sestavku se bomo dotaknili predstavitve dane končne množice v računalniku in si ogledali dva postopka za oblikovanje podmnožic množice prvih $n$ naravnih števil.

### *V računalniku*

Imejmo naravno število $n$ in označimo z $\mathbb{N}_n$ množico vseh naravnih števil od 1 do $n$. Vprašamo se: Kako predstaviti v računalniku poljubno podmnožico množice $\mathbb{N}_n$?

Ena izmed možnosti je, da za vsako naravno število od 1 do $n$ preverimo, ali pripada množici $S$. Odgovor *Da* označimo z 1, odgovor *Ne* pa z 0. Odgovore zapišemo po vrsti z desne proti levi; tako dobimo za vsako podmnožico $S$ množice $\mathbb{N}_n$ natanko določeno zaporedje enic in ničel.

*Zgled:* $n = 8$,
$\mathbb{N}_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$S = \{1, 2, 3, 6\}$.

| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Množici $S$ ustreza zaporedje odgovorov 00100111.

Mimogrede omenimo, da *turbo pascal* namenja takšni predstavitvi množice največ 32 krat 8 bitov in s tem omogoča uporabo osnovne množice, ki ima največ 256 elementov.

Nabor ničel in enic, ki smo jih priredili množici $S$, lahko razumemo kot dvojiški zapis števila; imenujmo ga *število množice* $S$ in ga označimo s $\sigma(S)$. S tem je vsaki podmnožici množice $\mathbb{N}_n$ prirejeno natanko določeno število in vsaki $n$-mestni dvojiški številki ustreza natanko določena podmnožica množice $\mathbb{N}_n$. Množica $\mathbb{N}_n$ ima torej toliko podmnožic, kot je števil $0, 1, \ldots, 2^n - 1$, ki se jih da zapisati z $n$-mestnimi dvojiškimi številkami. Ker je takih števil $2^n$, lahko rečemo: *Množica z n elementi ima natanko* $2^n$ *podmnožic.*

*Zgled:* Podmnožice množice $\mathbb{N}_3$ in njihova dvojiško zapisana števila:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\emptyset$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{1,2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
| $\sigma(S)$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |

*Iz računalnika*

Pri oblikovanju podmnožic množice $\mathbb{N}_n$ si najprej izberemo *prvo* podmnožico — običajno je to *prazna* množica — in pravilo, ki vsaki pravi podmnožici $S \subset \mathbb{N}_n$ priredi njeno *neposredno naslednico* $S'$. Za začetek oblikujmo postopek, ki izpiše vse podmnožice množice $\mathbb{N}_n$ po njihovih naraščajočih številih.

Naj bo $S$ prava podmnožica množice $\mathbb{N}_n$ in $\sigma(S)$ njeno število. Kako poiskati množico $S'$, ki ima število $\sigma(S)+1$? Pomislimo na dvojiško zapisano število $\sigma(S)$ in na to, kako mu prištejemo 1:

- Med ničlami številke $\sigma(S)$ poiščemo tisto, ki leži skrajno desno; takšna ničla zagotovo obstaja, ker je $S$ *prava* podmnožica množice $\mathbb{N}_n$.
- Najdeno ničlo zamenjamo z enico, vse enice, ki ležijo desno od nje, pa zamenjamo z ničlami.

Enici, s katero smo zamenjali skrajno desno ničlo številke $\sigma(S)$, ustreza najmanjši element množice $\mathbb{N}_n \setminus S$. Označimo ga s $k$; enicam, ki smo jih zamenjali z ničlami, ustreza tedaj množica $\{1, 2, \ldots, k-1\}$.

*Zgled:* $n = 8$, $S = \{1,2,3,5,6\}$; množica $S$ ima številko $\sigma(S) = 00110111$. Nadalje je $k = \min(\mathbb{N}_8 \setminus S) = \min\{4,7,8\} = 4$ in je $S' = S \cup \{4\} \setminus \{1,2,3\}$, torej $S' = \{4,5,6\}$. Potem je $\sigma(S') = 00111000 = \sigma(S) + 1$.

Imamo

```
postopek Naredi_podmnožice_1(IN_n: množica);
k: naravno število;
S: množica;
od tod
   S ← ∅;
   izpiši_množico(S);
   ponavljaj
      k ← min(IN_n \ S);
      S ← S ∪ {k} \ {1, 2, ... , k − 1};
      izpiši_množico(S);
   do izpolnitve pogoja S = IN_n;
do tod.
```

Oglejmo si še postopek, ki izpiše podmnožice množice $\mathbb{N}_n$ v *leksikografskem* vrstnem redu. Ime izvira iz grških besed *lexis* (beseda) in *graphein* (pisati) in označuje vrstni red, ki ga uporabljamo pri razvrščanju besed v slovarjih. Naj bosta $S_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ in $S_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ različni podmnožici dane množice $\mathbb{N}_n$, ki smo jima elemente zapisali *po velikosti* od najmanjšega do največjega. Za množico $S_1$ rečemo, da *je leksikografsko pred* množico $S_2$, če je prazna ali če obstaja takšno naravno število $k$, da se množici $S_1$ in $S_2$ ujemata v prvih $k-1$ elementih in je $i_k < j_k$.

*Zgled:* Podmnožice množice $\mathbb{N}_3$ leksikografsko uredimo v zaporedje $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{2,3\}$, $\{3\}$.

Naj bo $S$ kaka prava podmnožica množice $\mathbb{N}_n$ in $m$ njen največji element; če je množica $S$ prazna, vzemimo $m = 0$. Podmnožice množice $\mathbb{N}_n$, ki leksikografsko sledijo množici $S$, naredimo tako, da

> za vsak naravni $k$ od $m+1$ do $n$ priključimo množici $S$ število $k$ in naredimo vse podmnožice množice $\mathbb{N}_n$, ki imajo množico $S \cup \{k\}$ za svoj začetni del.

Glede na to, da je prazna množica podmnožica vsake množice, je delo smiselno začeti z $S = \emptyset$; uporabimo

```
postopek Naredi_podmnožice_2(m, n: celi števili; S: množica);
k : naravno število;
od tod
   izpiši_množico(S);
   za vsak k od m+1 do n ponovi
      Naredi_podmnožice_2(k, n, S ∪ {k});
do tod.
```