PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 2
Strani 104–109

Jože Grasselli:

ZANIMIVA LASTNOST NARAVNIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, teorija števil, naravna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1216-Grasselli.pdf

MATEMATIKA

ZANIMIVA LASTNOST NARAVNIH ŠTEVIL

Pavle obišče sošolca Petra. Reče mu: "Daj mi kakšno knjigo, pokazal ti bom nekaj zanimivega!" Peter pripravlja domačo nalogo o ljudskem pesništvu. Na mizi mu leži knjiga *Ljudske pesmi*, ki je izšla leta 1972 v zbirki Naša beseda. Izroči jo Pavletu, ki jo na hitro prelista. Ko jo vrne, reče: " Nisem vedel za to knjigo. Dobra bo, začniva z igro! Vzemi si list papirja in svinčnik in skrij pred mano, kar boš pisal!"

Pavle naroča Petru korake:

a) Zapiši trimestno število, v katerem se prva in zadnja števka razlikujeta vsaj za dve.

b) V številu iz a) zamenjaj med seboj prvo in zadnjo števko.

c) Manjše od števil iz a) in b) odštej od večjega.

č) V razliki iz c) zamenjaj med seboj prvo in zadnjo števko.

d) Seštej števili iz c) in č).

e) V številu iz d) postavi pred zadnjo števko decimalno vejico.

Ko Peter vse to naredi, ga Pavle vpraša, koliko je dobil. Odgovor: "108,9." Po kratkem premisleku Pavle izjavi: "V knjigi, ki si mi jo dal, je na strani 108 kot deveta natisnjena beseda **je**." Peter pogleda v knjigo in vidi, da je res tako. V *Ljudskih pesmih* se stran 108 namreč začenja z verzi:

na stran je pustil krajnega,
udari ravno srednjega.
Je *njemu pravo glavo vzel ...,*

ki so iz pesmi o Pegamu in Lambergarju.

Peter je nekoliko začuden. A Pavle že nadaljuje. Namesto koraka a) naroča:

a') Zapiši trimestno število, v njem naj se prva in zadnja števka razlikujeta za ena.

Drugi napotki so isti kot zgoraj. Peter je sedaj prišel do števila 19,8 in Pavle pove, da je v *Ljudskih pesmih* na strani 19 osma beseda **gorah**. Peter ugotovi, da tudi to drži. Igro bi Peter še rad nadaljeval, a Pavle nima niti trenutka časa več in se poslovi. Petru ne da miru misel, kako je mogel Pavle uganiti obe besedi. Odloči se podrobneje preiskati Pavletovo navodilo. Sledimo Petrovi razčlembi. Takole razmišlja:

Po a) in a') izhajam iz trimestnega števila, v katerem prva in zadnja števka nista enaki. Po b) in c) zamenjam prvo in zadnjo števko in od večjega števila odštejem manjše; zato smem vzeti, da je že v prvotnem številu prva števka večja od zadnje. Imam tedaj število

$$(a+h)\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a. \tag{1}$$

Tu je b vzet izmed števk $0, 1, 2, \ldots, 9$, za a so možnosti $0, 1, 2, \ldots, 8$ in h je tako pozitivno celo število, da je

$$1 \leq a+h \leq 9.$$

Ko zamenjam prvo in zadnjo števko v (1) (korak b)), dobim število

$$a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + (a+h) \tag{2}$$

in razlika med (1) in (2) (korak c)) je

$$h\cdot 10^2 + (-h). \tag{3}$$

Kadar je $h \geq 2$, se v (1) prva in zadnja števka razlikujeta vsaj za dve. Ker je $10^2 = 9\cdot 10 + 10$, se da (3) v tem primeru pisati

$$(h-1)\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + (10-h). \tag{4}$$

Zamenjam prvo in zadnjo števko v (4) (korak č)) in pridem do števila

$$(10-h)\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + (h-1). \tag{5}$$

Vsota za (4) in (5) (korak d)) je

$$9\cdot 10^2 + 18\cdot 10 + 9 = 10^3 + 8\cdot 10 + 9 = 1089.$$

Kadar je $h = 1$, ima (3) vrednost 99, ko zamenjam števki je spet 99 in

$$99 + 99 = 198.$$

Stvar je jasna! Trimestnih števil z različno prvo in zadnjo števko je 810. (Trimestnih števil je 900, takih, ki se začenjajo in končujejo z isto števko pa 90.) Pri vsakem teh števil računanje po Pavletovem navodilu pripelje ali do števila 1089 ali do števila 198 in potem do 108,9 ali do 19,8. Tu je razlog, da je Pavle igro prekinil. In kako je uganil besedi? Ko je listal po knjigi, ju je neopazno poiskal.

Vidimo: **Če uporabimo Pavletovo navodilo (brez koraka e)) na trimestno število z različnima prvo in zadnjo števko, ne najdemo drugačnih števil kot 1089 in 198.**

Pustimo zdaj Pavleta in Petra in se vprašajmo: Kaj pa če izhajamo iz števila, ki ima več kot tri mesta? Zamenjava prve in zadnje števke v trimestnem številu se ujema z zrcaljenjem števk glede na srednjo števko. Pri številu z več kot tremi mesti je zmeraj mogoče zrcaliti števke glede na sredino števila. Pri tem npr. iz 5164 dobimo 4615, iz 41537 pa 73514. Nadomestimo v Pavletovem navodilu trimestno število s številom, ki ima več ko tri mesta, zamenjavo prve in zadnje števke pa z zrcaljenjem števk glede na sredino števila. Do kakšnih vrednosti pripelje to navodilo?

Imejmo najprej število z liho mnogo števkami:

$$a_{2j} \cdot 10^{2j} + a_{2j-1} \cdot 10^{2j-1} + \ldots + a_j \cdot 10^j + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad j \geq 2. \tag{6}$$

Števke so izmed števil $0, 1, \ldots, 9$ in $a_{2j} \neq 0$. V sredini števila stoji števka a_j. Omejimo se še na primer, ko števke v (6) izpolnjujejo pogoje

$$\begin{gathered} a_{2j} = a_0+h_0,\ a_{2j-1} = a_1+h_1, \ldots, a_{j+2} = a_{j-2}+h_{j-2},\ a_{j+1} = a_{j-1}+h_{j-1} \\ h_0 \geq 1,\ h_1 \geq 1, \ldots, h_{j-2} \geq 1,\ h_{j-1} \geq 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Imamo torej število

$$(a_0+h_0)\cdot 10^{2j}+\ldots+(a_{j-1}+h_{j-1})\cdot 10^{j+1}+a_j\cdot 10^j+a_{j-1}\cdot 10^{j-1}+\ldots+a_0 \tag{8}$$

in po zrcaljenju število

$$a_0\cdot 10^{2j}+\ldots+a_{j-1}\cdot 10^{j+1}+a_j\cdot 10^j+(a_{j-1}+h_{j-1})\cdot 10^{j-1}+\ldots+(a_0+h_0). \tag{9}$$

Razlika med (8) in (9) je

$$\begin{gathered} h_0 \cdot 10^{2j} + h_1 \cdot 10^{2j-1} + \ldots + h_{j-1} \cdot 10^{j+1} + (-h_{j-1}) \cdot 10^{j-1} + \ldots + \\ + \ldots + (-h_1) \cdot 10 + (-h_0). \end{gathered} \tag{10}$$

Da se znebimo negativnih vrednosti, upoštevamo, da je

$$10^{j+1} = 9 \cdot 10^j + 9 \cdot 10^{j-1} + \ldots + 9 \cdot 10 + 10 \tag{11}$$

in število (10) potem zapišemo

$$\begin{gathered} h_0\cdot 10^{2j}+\ldots+h_{j-2}\cdot 10^{j+2}+(h_{j-1}-1)\cdot 10^{j+1}+9\cdot 10^j+(9-h_{j-1})\cdot 10^{j-1}+\ldots+ \\ + \ldots + (9 - h_1) \cdot 10 + (10 - h_0). \end{gathered} \tag{12}$$

Od tod pridemo po zrcaljenju števk do števila

$$(10-h_0)\cdot 10^{2j}+(9-h_1)\cdot 10^{2j-1}+\ldots+(9-h_{j-1})\cdot 10^{j+1}+9\cdot 10^{j}+ \\ +(h_{j-1}-1)\cdot 10^{j-1}+h_{j-2}\cdot 10^{j-2}+\ldots+h_1\cdot 10+h_0. \qquad (13)$$

Vsota števil (12) in (13) je

$$10^{2j+1}+9\cdot 10^{2j-1}+\ldots+9\cdot 10^{j+2}+8\cdot 10^{j+1}+18\cdot 10^{j}+8\cdot 10^{j-1}+ \\ +9\cdot 10^{j-2}+\ldots+9\cdot 10+10. \qquad (14)$$

Ker je

$$18\cdot 10^{j}=10^{j+1}+8\cdot 10^{j}$$

in podobno kot v (11) velja

$$9\cdot 10^{j-2}+9\cdot 10^{j-3}+\ldots+9\cdot 10+10=10^{j-1},$$

dobi število (14) zapis

$$10^{2j+1}+9\cdot 10^{2j-1}+\ldots+9\cdot 10^{j+1}+8\cdot 10^{j}+9\cdot 10^{j-1} \qquad (15)$$

ali na kratko

$$10\underbrace{9\ldots9}_{j-1}89\underbrace{0\ldots0}_{j-1}. \qquad (16)$$

Števki 9 in 0 se na naznačenih mestih ponovita $(j-1)$-krat. Pri petmestnem številu (7) je $j=2$ in (16) se glasi 109890.

Naj bo sedaj v številu sodo mnogo števk

$$a_{2j+1}\cdot 10^{2j+1}+a_{2j}\cdot 10^{2j}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0,\quad j\geq 1$$

in števke naj ustrezajo pogoju

$$a_{2j+1}=a_0+h_0,\ a_{2j}=a_1+h_1,\ldots,a_{j+1}=a_j+h_j, \\ h_0\geq 1,\quad h_1\geq 1,\ldots,h_j\geq 1. \qquad (17)$$

Podobno kot zgoraj ugotovimo, da sedaj navodilo pripelje do števila

$$10^{2j+2}+9\cdot 10^{2j}+\ldots+9\cdot 10^{j+2}+8\cdot 10^{j+1}+9\cdot 10^{j}, \qquad (18)$$

ali krajše zapisano

$$10\underbrace{9\ldots9}_{j-1}89\underbrace{0\ldots0}_{j}. \tag{19}$$

Za desetmestno število je $j = 4$ in če števke izpolnjujejo pogoj (17), pristanemo glede na (19) pri številu 10999890000.

Zaradi korakov b), c) dobimo isti izid (16), če namesto (7) velja za števke pogoj

$$\begin{gathered} a_0 = a_{2j} + h_0,\ a_1 = a_{2j-1} + h_1, \ldots, a_{j-1} = a_{j+1} + h_{j+1}, \\ h_0 \geq 1, h_1 \geq 1, \ldots, h_{j-1} \geq 1. \end{gathered} \tag{20}$$

Prav tako je izid (19), če izhajamo iz števila, pri katerem za števke namesto pogoja (17) drži pogoj

$$\begin{gathered} a_0 = a_{2j+1} + h_0,\ a_1 = a_{2j} + h_1, \ldots, a_j = a_{j+1} + h_j, \\ h_0 \geq 1,\ h_1 \geq 1, \ldots, h_j \geq 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Povzemimo: **Naj bo a naravno število, pri katerem so vse števke do sredine števila večje ali vse te števke manjše od zrcalnih števk. Ko izvršimo navodilo, najdemo število**

$$10\underbrace{9\ldots9}_{j-1}89\underbrace{0\ldots0}_{j-1},$$

kadar a premore $2j+1$ števk, $j = 2, 3, \ldots$ in število

$$10\underbrace{9\ldots9}_{j-1}89\underbrace{0\ldots0}_{j},$$

kadar v a nastopa $2j+2, j = 1, 2, \ldots$, števk.

Če v številu nekatere števke izpolnjujejo pogoj (7), nekatere pa pogoj (20), navodilo ne daje vrednosti (16). Prav tako ne dobimo (19), če za nekaj števk velja (17), za nekaj pa (21). Izidov, do katerih navodilo pripelje, je tukaj več. Njihov seznam je že pri šestmestnih številih precej obsežen.

Naloge.

1. Do katerih vrednosti prideš, če uporabiš navodilo na številih 624312, 624542, 624512, 663721?