PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 6
Strani 336–338

Borut Zalar:

ODVOD POLINOMA IN NJEGOVA UPORABA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1193-Zalar.pdf

ODVOD POLINOMA IN NJEGOVA UPORABA

1. Kaj je odvod polinoma?

Polinom ene spremenljivke je izraz oblike

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Privzamemo, da je prvi koeficient a_n različen od nič. Število n se tedaj imenuje stopnja polinoma P.

Odvod polinoma P je nov polinom P', ki ima stopnjo za ena nižjo od stopnje polinoma P. Dobimo ga po naslednjih pravilih:

(i) Odvod konstantnega polinoma je enak nič.
(ii) Odvod potence x^n je enak nx^{n-1}.
(iii) Odvod vsote polinomov je vsota posameznih odvodov; torej $(P+Q)' = P' + Q'$.
(iv) Odvod s konstanto pomnoženega polinoma je s to isto konstanto pomnožen odvod prvotnega polinoma; torej $(aP)' = a \cdot P'$.

Za zgled izračunajmo odvod polinoma $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 8$. Z uporabo zgornjih pravil dobimo

$$\begin{aligned} P'(x) &= (x^3)' + (2x^2)' + (4x)' - (8)' = \\ &= 1 \cdot (x^3)' + 2 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (x^1)' - 8 \cdot (1)' = \\ &= 1 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 4 \cdot x^0 - 8 \cdot 0 = \\ &= 3x^2 + 4x + 4. \end{aligned}$$

V naslednjih dveh razdelkih bomo ilustrirali na primerih uporabnost tega pojma.

2. Realne ničle

Za število α rečemo, da je ničla polinoma P, če je $P(\alpha) = 0$. Polinom ima največ toliko realnih ničel, kot je njegova stopnja, npr. polinom $P(x) = x^2 - 3x + 2$ ima lahko največ dve realni ničli in ju v resnici tudi ima. To sta $\alpha = 1$ in $\alpha = 2$. Polinom $P(x) = x^2 + 1$ pa nasprotno nima nobene realne ničle. Ničle ločimo tudi glede na njihovo stopnjo. Ničla α je prve stopnje, če $(x-\alpha)^2$ ne deli polinoma $P(x)$. Tak primer je ničla $\alpha = 1$ v polinomu $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Ničla α je druge stopnje, če $(x-\alpha)^2$ deli $P(x)$, $(x-\alpha)^3$

pa ne. Primer za to je ničla $\alpha = 1$ v polinomu $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Podobno definiramo tudi ničle višjih stopenj.

Za polinom $P(x)$ rečemo, da ima vse ničle realne, če je vsota stopenj vseh realnih ničel enaka stopnji polinoma. To lahko povemo tudi drugače: Polinom $P(x)$ ima vse ničle realne, če ga lahko zapišemo kot produkt

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \ldots (x - \alpha_k)^{n_k},$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ realne ničle polinoma $P(x)$. Njihove stopnje so seveda $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Naslednji izrek je dokazal matematik Rolle.

Če ima polinom $P(x)$ vse ničle realne, potem ima tudi njegov odvod $P'(x)$ vse ničle realne.

Dokaz tega izreka ni težak, vendar presega nivo srednješolske matematike. Uporabimo ga lahko za reševanje problemov naslednjega tipa:

Naj bo $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$. Ali je možno izbrati števila a, b, c tako, da bo imel polinom $P(x)$ same realne ničle?

Če polinom $P(x)$ zaporedoma odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} P'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b, \\ P''(x) &= 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2a, \\ P'''(x) &= 60x^2 + 24x + 6. \end{aligned}$$

Če bi imel $P(x)$ same realne ničle, bi imel po Rolleovem izreku tudi $P'(x)$ same realne ničle. Po isti logiki bi morala imeti tudi $P''(x)$ in $P'''(x)$ same realne ničle. S pomočjo odvoda smo manjšali stopnjo polinoma in po treh korakih prišli do kvadratne enačbe $60x^2 + 24x + 6 = 0$. Ta enačba pa nima realnih rešitev, ker je njena diskriminanta negativna. To pomeni, da je odgovor na zastavljeni problem negativen.

3. Minimum in maksimum

V zvezi z odvodom obstaja naslednji pomembni izrek:

Če je v točki α lokalni minimum ali maksimum, potem je α ničla odvoda $P'(x)$.