PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 6
Strani 362–366

Janez Strnad:

O ZAČETNIH ŠTEVKAH V NIZIH ŠTEVIL

Ključne besede: fizika.

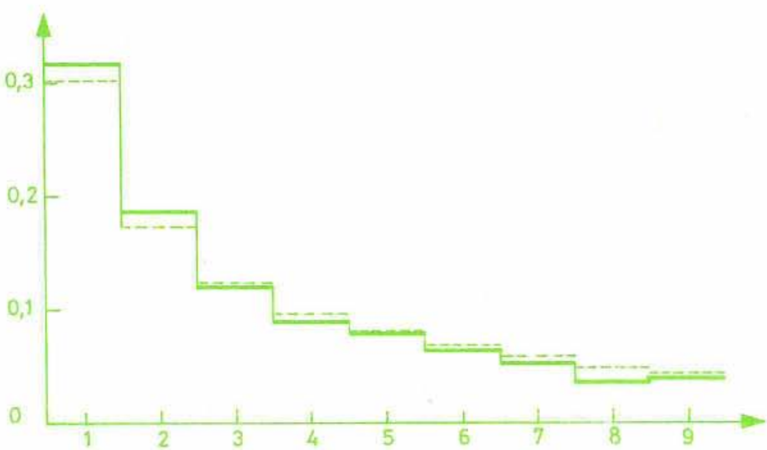
Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1193-Strnad.pdf

O ZAČETNIH ŠTEVKAH V NIZIH ŠTEVIL

Vzemite v roke telefonski imenik in upoštevajte prvih tisoč naročnikov, pri katerih je v naslovu navedena hišna številka. Tako dobite na primer na prvih šestih straneh in delu prvega stolpca na naslednji na začetku imenika za Ljubljano (od strani 5 do prvega stolpca na strani 11) tisoč hišnih številk, to je števil. Koliko od njih se začenja s števko (cifro) 1? Koliko se jih začenja z 2 in tako po vrsti s 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Pri tem se ne oziramo na to, ali ima število eno, dve ali tri mesta, ampak se zanimamo samo za prvo števko. Ali je vsaka od devetih števk na prvem mestu zastopana približno enakokrat, to je $1000/9 = 111$-krat? Ne, nikakor ne, kakor kažeta preglednica in diagram (slika 1).

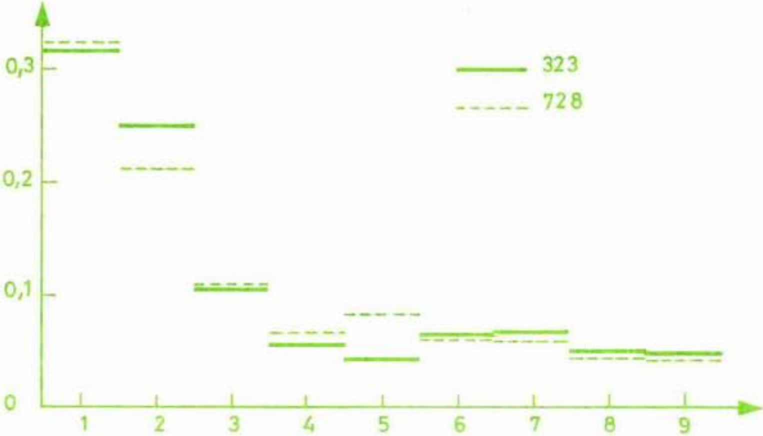
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	325	189	121	88	79	64	54	38	42
	0,325	0,189	0,121	0,088	0,079	0,064	0,054	0,038	0,042
P_n	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

V prvi vrstici so navedene števke in v drugi pogostnost, s katero se pojavljajo na prvem mestu. Tretja vrstica vsebuje relativno pogostnost ali delež, ki ga dobimo, ko pogostnost delimo s celotnim številom. V našem primeru je to 1000, tako da deleža ni težko izračunati.



Slika 1. Delež hišnih številk, ki se začenjajo s števkami od 1 do 9, za prvih tisoč telefonskih naročnikov v Ljubljani (sklenjene črte) in napovedi Benfordovega zakona (črtkane črte).

Največkrat je na prvem mestu števka 1, sledijo ji po vrsti 2, 3 in tako dalje. Devetica je v našem primeru na prvem mestu sicer pogosteje kot osmica, a to je posledica razmeroma majhnega celotnega števila. Opazimo namreč, kako se postopno kaže urejenost, ko upoštevamo več in več števil (slika 2).



Slika 2. Delež hišnih številk, ki se začenjajo s števkami od 1 do 9, za prvih 323 (prve tri strani) telefonskih naročnikov v Ljubljani (sklenjene črte) in za prvih 728 (prvih pet strani) telefonskih naročnikov (črtkane črte). Pri manjšem številu zajetih števil so odstopanja večja.

Ugotovitev, o kateri poročamo ima zanimivo zgodovino. Simon Newcomb (1835 do 1909), profesor matematike in astronomije, je veliko dela vložil v izdelavo novih in natančnejših tablic za gibanje planetov in Lune. Pri svojem računanju je opazil, kot že drugi pred njim, da so knjige z logaritmi bolj zdelane na začetku. Za logaritme ni mogoče reči, da so jih bralci začeli brati, pa nad njim obupali kakor nad slabim romanom. Zato je Newcomb leta 1881 pojav poskušal okvirno pojasniti.

Temeljiteje se je ukvarjal z vprašanjem fizik Frank Benford pri ameriški družbi General Electric. Leta 1938 je objavil članek z naslovom *Zakon anomalnih števil*. Po *Benfordovem zakonu* se delež števil, ki se začenjajo s števko n, z naraščajočim številom preiskanih podatkov bliža

$$P_n = \log\frac{n+1}{n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, 9.$$

Po tej enačbi izračunane deleže navaja zadnja vrstica preglednice.

Benford je raziskal prve števke v dvajsetih nizih podatkov, med njimi površine porečja 335 rek, relativne atomske mase tisoč kemijskih spojin, hišne številke 342 znamenitih Američanov. V celoti je obdelal več kot 20 tisoč podatkov. V njih se je enica pojavila z največjim deležem 0,306, ... devetica pa z najmanjšim deležem 0,047, kar se dobro ujema z zakonom. Od posamičnih nizov so se nekateri zakonu bolje prilegali, drugi slabše. Med zadnjimi so bili na primer kvadratni koreni naravnih števil. Mednje sodijo tudi telefonske številke iz našega telefonskega imenika, saj se ljubljanske številke sploh ne začenjajo s 6, 7, 8, 9. Benford je sodil, da velja njegov zakon za števila, ki jih dobimo pri merjenju kake količine, na primer določene snovne lastnosti za različne snovi, če izida ne moremo napovedati. Zato je govoril o *anomalnih številih*.

V fiziki poznamo več podobnih zakonov. Logaritem razmerja med vpadnim svetlobnim tokom in tokom, ki ga prepušča plast enakomerno absorbirajoče snovi, je sorazmeren z debelino plasti. Logaritem razmerja začetnega števila atomskih jeder in števila atomskih jeder, ki preostane pri radioaktivnem razpadanju po določenem času, je sorazmeren s časom. V fiziologiji velja za odziv čutil Weber-Fechnerjev zakon, po katerem je odziv sorazmeren z logaritmom dražljaja, na primer izdatnost občutka zvoka, to je glasnost, je sorazmerna z logaritmom jakosti zvoka. Navadno mislimo na inverzno odvisnost in govorimo o eksponentnem zakonu. Tak zakon velja tudi v biologiji za število bitij določene vrste pri neomejeni rasti.

Leta 1991 sta J.Burke in E.Kincanon preskusila Benfordov zakon na osnovnih fizikalnih konstantah in poročala o tem v American Journal of Physics. Izbrala sta dvajset konstant od atomske enote mase preko Avogadrovega števila do mase protona in hitrosti svetlobe. Za tako maloštevilen niz ne pričakujemo dobrega ujemanja z zakonom. Zares ni konstante, ki bi se začela s 4 ali 7, a začuda se jih z 1 začenja 8, z 9 pa samo 2. Skoraj vse konstante imajo enoto, kar pomeni, da je njihovo mersko število odvisno od uporabljenih osnovnih enot. Običajno jih navedemo v mednarodnem sistemu enot, a Burke in Kincanon sta jih za primerjavo navedla tudi z angleškimi osnovnimi enotami in nista dobila nič slabšega ujemanja.

Zares pričakujemo, da ugotovljena lastnost obsežnega niza podatkov ni odvisna od izbire enote, če gre za izide merjenja kake fizikalne količine. Hitro uvidimo, da Benfordov zakon obvelja, če pomnožimo vsa števila danega niza z izbranim številom. To je napeljalo nekatere na misel, da je zakon povezan s kaosom in fraktali, za katere vemo, da so samopodobni in neobčutljivi na merilo.

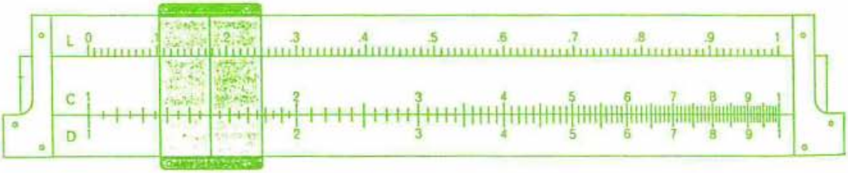
Leta 1993 so B.Buck, A.C.Merchant in S.M.Perez v European Journal of Physics poročali o svojem delu z razpolovnimi časi atomskih jeder, ki razpadajo z radioaktivnim razpadom α. Pri takem razpadu izstreli jedro delec α, to je jedro helijevega atoma, in se spremeni v jedro elementa, ki pride v periodni preglednici na vrsto dve mesti prej. V razpolovnem času razpade polovica začetnega števila jeder. Razpolovni časi segajo od majhnih delov sekunde do milijard let. Trije fiziki so raziskovali podrobnosti radioaktivnega razpada in poskušali pojasniti izmerjene razpolovne čase s teorijo. Porazdelitev podatkov po prvih številkah je bil samo stranski proizvod tega raziskovanja. Ugotovili so, da so se izmerjeni razpolovni časi za 477 jeder dobro prilegali Benfordovemu zakonu: delež 1 je bil 0,296, ... delež 9 pa 0,052. Podobno so ugotovili za te razpolovne čase, ki jih napove teorija: delež 1 je bil 0,310, ... delež 9 pa 0,044. Pri nizu, ki vsebuje le 477 podatkov, moramo biti pripravljeni tudi na nekaj odstopanja.

Doslej smo poročali o tem, kaj ugotovimo, če se zanimamo za začetne števke v nizih števil. Ali je ugotovitev mogoče pojasniti? Mnenja o tem niso enotna.

S.Newcomb je izhajal iz dejstva, da lahko vsako pozitivno število a zapišemo v obliki 10^s z realnim številom $s = \log a$, če mislimo na logaritme z osnovo 10. Tisti, ki so še računali z logaritmi, se spominjajo, da celi del s določa lego decimalne vejice v številu a, število samo, ne glede na vejico, in s tem tudi njegovo prvo števko, pa določa del s za vejico. Newcombu se je zdelo samo ob sebi umljivo, da je neceli del s enakomerno porazdeljen na intervalu $[0,1)$. Tako bi že on lahko odkril Benfordov zakon.

Tudi Benford je mislil, da gre za zakon narave, ki ga ni treba podrobno pojasnjevati. Po njegovem mnenju "narava šteje" na primer takole 1, $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $8 \cdot 2 = 16$, ... V tem primeru so deleži števil, ki se začenjajo s posamičnimi števkami, sorazmerni z dolžino, ki ustreza tej števki na logaritmičnem računalu (slika 3). Pred tremi desetletji so z njimi računali študenti, dokler jih niso izpodrinila žepna računala.

Leta 1944 sta fizika S.A.Goudsmit in W.H.Furry ugovarjala, da gre zgolj za posledico našega pisanja števil. To sta W.H.Furry in matematik H.Hurwitz poskusila naslednje leto v isti reviji dodatno utemeljiti. Namesto Benfordovega zakona bi dobili $P_n = \log_A[(n+1)/n]$, $n < A$, če bi pisali števila v številskem sistemu z osnovo A, ne v desetiškem. Pri tem pomeni $\log_A$ logaritem z osnovo A.

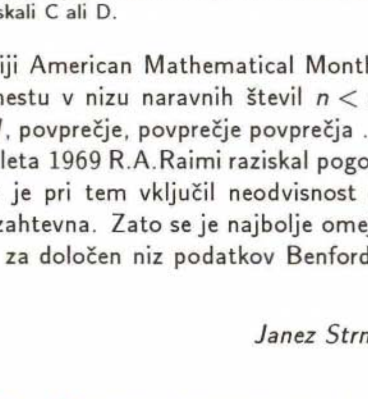


Slika 3. Na logaritmičnem računalu ustrezajo dolžine deležem začetnih številk; delež podatkov z 2 na prvem mestu in delež podatkov z 1 na prvem mestu sta v enakem razmerju kot daljica med 3 in 2 in daljica med 2 in 1 na skali C ali D.

B.J.Flehingerjeva je leta 1966 v reviji American Mathematical Monthly izhajala od deleža števke n na prvem mestu v nizu naravnih števil $n < N$. Delež števke 1 se na primer spreminja z N, povprečje, povprečje povprečja ... se za $N \rightarrow \infty$ bližajo log2. V isti reviji je leta 1969 R.A.Raimi raziskal pogoje, pri katerih dobimo Benfordov zakon, in je pri tem vključil neodvisnost od merila. Razprava, ki smo jo nakazali, je zahtevna. Zato se je najbolje omejiti na to, da ugotavljamo, kako dobro velja za določen niz podatkov Benfordov "zakon", in se ne ukvarjati s težavami.

Janez Strnad

NAGRADNA NALOGA - MAGIČNI ŠESTKOTNIK - Rešitev s str. 193



Na desni vidimo magični šestkotnik, katerega iskanje je zaposlovalo Clifforda Adamsa več kot pol stoletja. Našim reševalcem je šlo delo hitreje od rok. Resnici na ljubo povejmo, da smo, računajoč na računalnikarje, pričakovali bogatejšo bero. Vendar nam je rešitve poslalo vsega sedem reševalcev. Med njimi je žreb izbral Draga Bokala iz Srednje vasi pri Polhovem Gradcu in Andreja Zalarja iz Šentjurja.

Obema smo nagradno knjigo Keitha Devlina Nova zlata doba matematike že poslali po pošti. Rešitve so nam poslali še: Matej Mencinger z Raven