CASUS IRREDUCIBILIS
Ob 240. obletnici rojstva Jurija Vege

V gričevju, ki spremlja levi breg Save na vijugasti poti od Ljubljane do Litije, leži Zagorica. Pred 240 leti, natančneje 23. marca 1754, se je v Zagorici revnim staršem rodil slovenski matematik Jurij Vega. Rojen je bil v vznemirljivih časih vladanja Marije Terezije, odraščal v obdobju reform njenega sina Jožefa II., kot častnik avstrijske vojske pa je na bojišču doživljal začetek konca turškega imperija v bojih za Beligrad ter posledice francoske revolucije v številnih bitkah zoper Francoze ob Renu, da vojne s Prusi niti ne omenjamo.

Vegovo matematično delo poznamo predvsem po zbirki logaritmovnikov, s katerimi je zaslovel po vsem svetu in so jih uporabljali še dolgo po njegovi smrti. Manj znane, vendar nič manj zanimive, so njegove znanstvene razprave. Najpomembnejša je gotovo tista, v kateri je izračunal 140 decimalk števila π. Z njo je več kot pol stoletja držal "rekord" pri računanju decimalk te najznamenitejše matematične konstante.

Vega je za svoje delo dobival številna priznanja. Za državo, oziroma cesarja, je bil najpomembnejši njegov dosežek na področju balistike, ko je konstruiral izvrsten možnar. Leta 1800, le dve leti pred smrtjo, je bil povzdignjen v barona. Jurij Vega je bil eden redkih Slovencev, ki se je dokopal do družinskega grba. Prav gotovo pa je bil edini, ki si je grb zaslužil s svojim delom in ga ni pridobil zaradi bogastva in moči: na grbu je naslikana prižgana bomba (slika 1).

Vega si je po končanem šolanju v Ljubljani, kjer sta bila z Linhartom sošolca, v resnici služil kruh tako kot večina matematikov vseh časov: s poučevanjem. Učil je na topniški šoli na Dunaju. Svoja predavanja je izdal v obliki učbenika *Vorlesungen über die Mathematik* (Predavanja o matematiki). S tem se je postavil na čelo vrsti izvrstnih slovenskih piscev matematičnih učbenikov. Dokler smo bili Slovenci še vključeni v Avstro-Ogrsko, je bilo razumljivo, da so učbenike Vega, Močnika, Hočevarja in Zupančiča tiskali v nemščini in prevajali v druge jezike. Kasneje je tudi Plemelj izdal monografijo v angleščini, vendar je postalo jasno, da je iz male države mnogo teže prodreti na svetovni trg. Tako smo pravzaprav v paradoksalnem položaju. Slovenski matematiki dandanes mnogo laže izdajamo v tujini svoje znanstvene spise kakor pa učbenike.

Slika 1. Vegov grb

Vsakomur mora biti jasno, da so učbeniki izpred dvesto let zastareli. Kljub temu pa je vredno pogledati, kaj je Vega pisal v svojih *Vorlesungen über die Mathematik*. Naša matematična nrav nam narekuje, da se spomnimo tega velikana na način, ki matematikom najbolje pristoji. Poskusimo podoživeti nekaj razmislekov, ki jih je Vega prelil na strani svojega učbenika.

Oglejmo si dodatek druge knjige, ki nosi naslov: *Analytische Darstellung der Sinus für jeden dritten Grad von* 0 *bis* 90° (Analitična predstavitev sinusa za vsako tretjo stopinjo od 0° do 90°). Gre za razpredelnico vrednosti $\sin\alpha$, za kote $\alpha = 0^\circ, 3^\circ, 6^\circ, \ldots, 90^\circ$ (tabela 1).

Matematik pa si ob tej razpredelnici nehote zastavi več vprašanj. Nekatera med njimi utegnejo zanimati tudi bralce Preseka:

- Zakaj so sinusi privilegirani? Zakaj ni še razpredelnic za tangense in kotangense?
- Zakaj niso koreni v razpredelnici izračunani, ampak so puščeni v "analitični obliki"?
- Zakaj je korak v razpredelnici ravno 3° in ne morda 1°, 2°, 4° ali 5°?
- Kako si lahko sami izračunamo takšno razpredelnico, če bi jo potrebovali?
- Ali je razpredelnica v dobi računalnikov zastarela, odveč?

Preden odgovorimo na zastavljena vprašanja, le bežno ponovimo definicije trigonometrijskih funkcij (sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans in kosekans) za ostre kote, torej za kote v pravokotnem trikotniku.

Za pravokotni trikotnik s katetama a, b, hipotenuzo c, kotom α nasproti a in kotom $90^\circ - \alpha$ nasproti b definiramo:

$$\sin\alpha := \frac{a}{c}, \ \tan\alpha := \frac{a}{b}, \ \mathrm{sec}\alpha := \frac{c}{a};$$
$$\cos\alpha := \frac{b}{c}, \ \cot\alpha := \frac{b}{a}, \ \mathrm{csc}\alpha := \frac{c}{b}.$$

Vse trigonometrijske funkcije je mogoče izraziti samo s sinusom:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sin(90^\circ - \alpha),$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha},$$
$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \ \mathrm{csc}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Zato je razumljivo, da lahko vrednosti drugih trigonometrijskih funkcij izračunamo s seštevanjem, odštevanjem, množenjem in deljenjem iz vrednosti sinusov. S tem smo odgovorili na prvo vprašanje.

No, natančnejši pogled na razpredelnico pokaže, da je uporabniku preglednice Vega pripravil vse potrebno za računanje sinusov. Na začetku stojijo naslednje iracionalne konstante:

$\sqrt{2}$	1,414213562373
$\sqrt{3}$	1,732050807569
$\sqrt{5}$	2,236067977500
$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	2,689994047856

Njegove konstante se potem nadaljujejo z

$$\sqrt{5-\sqrt{5}}, \ \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}, \text{itd.}$$

Vse te pa je mogoče izračunati iz osnovnih štirih konstant s celimi števili in z elementarnimi računskimi operacijami.

Odgovor na drugo vprašanje je skoraj očiten. Vega je s preglednico omogočil, da si sami izračunamo tabelirane sinuse s poljubno natančnostjo. Za vse praktične račune seveda zadoščajo konstante, izračunane na 12 decimalnih mest.

Zakaj si je Vega izbral ravno korak 3° pri svoji razpredelnici? Ali gre za slučaj? Kako to, da je mogoče izraziti sinuse vseh teh kotov s koreni?

$$
\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \cos 87^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{15+3\sqrt{5}}\right] \\
\sin 6^\circ &= \cos 84^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-1 - \sqrt{5} + \sqrt{30-6\sqrt{5}}\right] \\
\sin 9^\circ &= \cos 81^\circ = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \\
\sin 12^\circ &= \cos 78^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right] \\
\sin 15^\circ &= \cos 75^\circ = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) \\
\sin 18^\circ &= \cos 72^\circ = \tfrac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right) \\
\sin 21^\circ &= \cos 69^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{15-3\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \\
\sin 24^\circ &= \cos 66^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right] \\
\sin 27^\circ &= \cos 63^\circ = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{5+\sqrt{5}}\right] \\
\sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2} \\
\sin 33^\circ &= \cos 57^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{15+3\sqrt{5}}\right] \\
\sin 36^\circ &= \cos 54^\circ = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right] \\
\sin 39^\circ &= \cos 51^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{15-3\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \\
\sin 42^\circ &= \cos 48^\circ = \tfrac{1}{8}\left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{30+6\sqrt{5}}\right] \\
\sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
\sin 48^\circ &= \cos 42^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right] \\
\sin 51^\circ &= \cos 39^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{15-3\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \\
\sin 54^\circ &= \cos 36^\circ = \tfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right) \\
\sin 57^\circ &= \cos 33^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{15+3\sqrt{5}}\right] \\
\sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
\sin 63^\circ &= \cos 27^\circ = \tfrac{1}{4}\left[-\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{5+\sqrt{5}}\right] \\
\sin 66^\circ &= \cos 24^\circ = \tfrac{1}{8}\left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{30-6\sqrt{5}}\right] \\
\sin 69^\circ &= \cos 21^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{15-3\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \\
\sin 72^\circ &= \cos 18^\circ = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \\
\sin 75^\circ &= \cos 15^\circ = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) \\
\sin 78^\circ &= \cos 12^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-1 + \sqrt{5} + \sqrt{30+6\sqrt{5}}\right] \\
\sin 81^\circ &= \cos 9^\circ = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right] \\
\sin 84^\circ &= \cos 6^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right] \\
\sin 87^\circ &= \cos 3^\circ = \tfrac{1}{8}\left[-\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{15+3\sqrt{5}}\right]
\end{aligned}
$$

Tabela 1. Vegova razpredelnica sinusov. Vrstni red členov v izrazih je nekoliko spremenjen.

Ponovimo Vegov razmislek. Upoštevati moramo zvezi:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

ki ju spoznamo v srednji šoli pri pouku trigonometrije.

Od tod zlahka izpeljemo obrazce za sinuse dvojnih, trojnih in petkratnih kotov:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$
$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha.$$

Uporabili bomo še zvezi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$$

in

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

ter znano dejstvo, da sinus narašča, ko kot narašča od 0° do 90°. Iz izrojenega trikotnika dobimo:

$$\sin 0^\circ = 0,\ \sin 90^\circ = 1\,.$$

Če znamo izračunati $\sin 3^\circ$, lahko z obrazcem za sinus vsote načeloma izračunamo sinuse vseh manjkajočih kotov. Izpeljava lahko poteka takole:

Ker je 30° tretjina 90°, označimo $x = \sin 30^\circ$ in iz zveze za sinus trojnega kota

$$\sin 90^\circ = \sin(3\cdot 30^\circ) = 3\sin 30^\circ - 4\sin^3 30^\circ$$

dobimo enačbo

$$1 = 3x - 4x^3\,,$$

ki ima rešitve $x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{1}{2}$. Ker je $0 < x = \sin 30^\circ < 1$, mora biti $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Isti trik lahko uporabimo pri računanju $y = \sin 18^\circ$. Razlika je le v tem, da izberemo obrazec za sinus petkratnega kota. Rešiti moramo enačbo

$$1 = 5y - 20y^3 + 16y^5\,.$$

Koren $y_1 = 1$ uganemo, potem pa dobimo enačbo 4. stopnje $16y^4 + 16y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0$, ki je kvadrat kvadratne enačbe

$$(4y^2 + 2y - 1)^2 = 0.$$

Le-ta ima dve dvojni rešitvi: $y_{2,3} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1), y_{4,5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. Ker iščemo $\sin 18^\circ$ na intervalu $(0, \frac{1}{2})$, ustreza temu pogoju le ena dvojna rešitev. Tako imamo

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

Iz obrazca za sinuse polovičnih kotov dobimo

$$\sin 15^\circ = \sin\frac{30^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 30^\circ} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 30^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Če uporabimo še obrazec za sinus razlike kotov za kota $\alpha = 18^\circ$ in $\beta = 15^\circ$, dobimo

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

Pri tem dobimo manjkajoče vrednosti za kosinuse iz obrazca

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Tako imamo

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

in

$$\cos 15^\circ = \sqrt{1-\sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Končni rezultat je torej

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8}\left((-1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{3}} + (1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right).$$

Obliko je izbral računalniški sistem *Mathematica*. Z računalnikom smo preverili (bralec pa naj se o tem prepriča brez računalnika), da je vrednost enaka tisti, ki jo je zapisal Jurij Vega:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{15+3\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Ko smo z Mathematico preračunavali sinuse, smo opazili, da je mogoče $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ izraziti s $\sqrt{2}$ in $\sqrt{6}$. Ali lahko ugotovite, kako? Če tega niste storili že prej, zdaj brez težav pokažete enakost gornjih izrazov za $\sin 3^\circ$.

Računalnikarji pa si ob pogledu na Vegovo razpredelnico zastavimo naslednje vprašanje: Koliko časa bi porabili, da bi po navodilih iz tabele izračunali sinuse na n decimalnih mest? Zanima nas torej *časovna zahtevnost*. Ob tem moramo upoštevati nekaj predpostavk.

1. Računanje n decimalk iracionalnega kvadratnega korena iz majhnega celega števila zahteva približno n^2 operacij.
2. Računanje n decimalk produkta dveh iracionalnih števil zahteva približno n^2 operacij.
3. Računanje n decimalk kvocienta dveh iracionalnih števil zahteva približno n^2 operacij. Pri tem mora biti deljenec znan na $2n$ decimalk.
4. Računanje n decimalk vsote dveh iracionalnih števil zahteva približno n operacij.
5. Računanje n decimalk razlike dveh iracionalnih števil zahteva približno n operacij.
6. Razpolavljanje iracionalnega števila (prvih n decimalk) zahteva približno n operacij.

Ob teh predpostavkah lahko ugotovimo, da je za računanje razpredelnice po Vegovi metodi potrebnih $16n^2 + 90n$ operacij: 16 zahtevnejših in 90 linearnih. Ker je $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, bi lahko število konstant, ki jih je potrebno računanti s kvadratnim algoritmom, zmanjšali na 15. Ni pa jasno, ali ni mogoče tega števila še zmanjšati. Zato lahko takoj zastavimo naslednje vprašanje:

Kolikšno je najmanjše število korenov (iracionalnih konstant), s katerimi lahko potem izrazimo vse sinuse samo s seštevanjem, odštevanjem in razpolavljanjem? (Namesto razpolavljanja bi lahko dopustili tudi deljenje s celimi števili.)

Zakaj torej Vega ni zapisal obrazca za računanje $\phi = \sin 1^\circ$ (in drugih sinusov)? ϕ je rešitev enačbe

$$a = 3x - 4x^3, \text{ kjer je } a = \sin 3^\circ.$$

Postopek za računanje decimalk te konstante so poznali že v petnajstem stoletju Arabci. Al-Kaši je približke za rešitev dobil takole:

$$\begin{aligned}\phi_0 &:= a,\\ \phi_1 &:= (a + 4\phi_0^3)/3,\\ \phi_2 &:= (a + 4\phi_1^3)/3,\end{aligned}$$

in tako naprej. Torej dobimo $\phi_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ rekurzivno

$$\phi_n := (a + 4\phi_{n-1}^3)/3.$$

Enačba tretje stopnje ima eksaktno rešitev. Poiščemo jo lahko s Cardanovim obrazcem. V konkretnem primeru lahko z Mathematico tudi poiščemo rešitve enačbe

$$4x^3 - 3x + \sin 3^\circ = 0.$$

Žal se rešitve enačbe izražajo s kompleksnimi koreni. Ko jih poskusimo izraziti z realnimi operacijami, nam to uspe le tako, da prevedemo računanje na trigonometrijo. Privzeti moramo, da vemo, koliko je $\sin 1^\circ$. To pa je circulus vitiosus (začarani krog). V Vegovih časih matematiki še niso vedeli, da je ta konkretna enačba nerešljiva z realnimi koreni. Kasneje so dokazali, da kubična enačba z racionalnimi koeficienti, ki ima tri realne rešitve in ni razcepna v racionalnih številih, nima rešitev, ki bi se jih dalo izraziti z realnimi koreni. Tak primer kubične enačbe so poimenovali *casus irreducibilis* (primer, ki se ne dá poenostaviti). In prav enačba za $\sin 1^\circ$ je casus irreducibilis. To pa ima za Vegovo tabelo globoke posledice. Jasno je, da nobenega sinusa s celimi stopinjami, ki niso v tabeli, ni mogoče izračunati s koreni. To pomeni, da je Vega izračunal vse, kar je mogoče izračunati. (No, lahko bi izračunali $\sin 1^\circ 30'$, vendar nas to ni zanimalo.)

Najlepše se zahvaljujem kolegu Marku Petkovšku za sodelovanje pri nastanku tega prispevka.

Tomaž Pisanski

POKLICI – Rešitev s str. 341

Naredimo razpredelnico, v kateri upoštevamo, da mora nekdo zaslužiti več kot Tomaž in da je število 3776 deljivo s 16 in ni deljivo s 3 ali s 7.

Odgovor je: Janez je vratar, Tomaž je poskuševalec, Simon je oskrbnik lešnikovih nasadov, Matej pa direktor.

Neža Mramor-Kosta