PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 6
Strani 346–351

Roman Drnovšek:

NEENAKOST MINKOWSKEGA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1193-Drnovsek.pdf

NEENAKOST MINKOWSKEGA

V tem prispevku bomo dokazali naslednjo **neenakost Minkowskega**[1]:

Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ poljubna nenegativna števila in $p \geq 1$ realno število. Tedaj velja neenakost

$$((x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p+\ldots+(x_n+y_n)^p)^{1/p} \leq$$

$$\leq (x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}+(y_1^p+y_2^p+\ldots+y_n^p)^{1/p}\ . \qquad (1)$$

V dokazu te neenakosti bomo uporabili drugo (prav tako pomembno) **Hölderjevo neenakost**[2]:

Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ poljubna nenegativna števila in $p > 1$ realno število. Če s q označimo število $p/(p-1)$, je

$$x_1 y_1+\ldots+x_n y_n \leq (x_1^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}\cdot(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{1/q}\ . \qquad (2)$$

Za števili p in q velja $pq = p+q$ oziroma $1/p+1/q=1$. Takima številoma pravimo *konjungirana eksponenta*. Očitno je $q > 1$. Prav tako je jasno, da sta tudi q in p konjungirana eksponenta, če sta taka p in q. Pomemben posebni primer konjungiranih eksponentov je $p=q=2$.

Hölderjevo neenakost običajno dokažemo s pomočjo **Youngove neenakosti**[3]:

Naj bosta $p>1$ in $q>1$ konjungirana eksponenta, torej $1/p+1/q=1$. Tedaj za poljubni nenegativni števili x in y velja

$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \qquad (3)$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je $x^p = y^q$ (kar bomo dokazali le za primer, ko je p racionalno število).

Youngovo neenakost lahko hitro dokažemo z uporabo neelementarnih metod; na primer s pomočjo odvoda poiščemo ekstrem primerne funkcije (naloga 4). Tukaj podajmo (bolj ali manj) elementaren dokaz.

---

[1] Neenakost je leta 1896 v svoji knjigi "Geometrie der Zahlen" predstavil nemški matematik H. Minkowski. (Glej prispevek na prejšnji strani.)

[2] V tej obliki je leta 1889 neenakost dokazal nemški matematik O. Hölder.

[3] Neenakost je leta 1912 prvi obravnaval angleški matematik W. H. Young.

Najprej se prepričajmo, da je (3) dovolj dokazati v primeru $x \geq y = 1$, torej veljavnost zveze

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{za vse} \quad x \geq 1 \; . \tag{4}$$

Za trenutek privzemimo, da smo (4) že dokazali. Naj bosta x in y poljubni nenegativni števili. Če je $x \geq y^{q-1}$, vstavimo v (4) namesto števila x število $x/y^{q-1} \geq 1$ in tako dobimo

$$\frac{x}{y^{q-1}} \leq \frac{x^p}{p\, y^{(q-1)p}} + \frac{1}{q} \; .$$

Če upoštevamo $(q-1)p = q$ in neenačbo pomnožimo z y^q, dobimo (3). To pomeni, da v primeru $x \geq y^{q-1}$ iz (4) sledi (3). Če pa je $x < y^{q-1}$, potem je

$$x^{p-1} < y^{(p-1)(q-1)} = y^{pq-p-q+1} = y \; .$$

Ker sta p in q konjungirana si eksponenta, sta taka tudi q in p. Če torej velja (4), potem je izpolnjena tudi neenakost

$$x \leq \frac{x^q}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{za vse} \quad x \geq 1 \; .$$

V tej neenačbi število x zamenjamo s številom $y/x^{p-1} > 1$, in podobno kot prej izpeljemo (3).

Če v neenakosti (4) upoštevamo $1/p + 1/q = 1$, dobimo

$$p(x-1) \leq x^p - 1 \; . \tag{5}$$

Pokažimo (5) najprej v primeru, ko je p racionalno število, torej $p = m/n$, kjer sta m in n naravni števili in $m > n$. Če je $x = 1$, potem velja v (5) enačaj. Dokažimo, da za $x > 1$ velja v (5) celo strogi neenačaj. Če pišemo $x = z^n$, potem je $z > 1$, dokazati pa moramo neenakost

$$\frac{z^n - 1}{n} < \frac{z^m - 1}{m},$$

oziroma, če upoštevamo pravilo o razliki m-tih oz. n-tih potenc in krajšamo z $z - 1 > 0$:

$$\frac{1 + z + \ldots + z^{n-1}}{n} < \frac{1 + z + \ldots + z^{m-1}}{m} \; . \tag{6}$$

Ker je $z > 1$, je $1 < z < z^2 < \ldots < z^{m-1}$, torej je

$$a = \frac{1 + z + \ldots + z^{n-1}}{n} < z^{n-1} < z^n < \ldots < z^{m-1} \; .$$

Zato imamo

$$\frac{1 + z + \ldots + z^{m-1}}{m} = \frac{(1 + z + \ldots + z^{n-1}) + (z^n + \ldots + z^{m-1})}{m} >$$

$$> \frac{na + \overbrace{(a + \ldots + a)}^{m-n}}{m} = \frac{na + (m-n)a}{m} = a \; ,$$

to je (6). Kaj pa, če p ni racionalno število? Tedaj pri poljubnem $k \in \mathbb{N}$ najdemo tako racionalno število r (odvisno od števila k), da je $r \leq p < r + 10^{-k}$. Število r lahko dobimo tako, da v decimalnem zapisu števila p prečrtamo vse decimalke od $(k+1)$-te naprej. Ker je r racionalno število, po že dokazanem velja $b = (x^r - 1)/(x-1) - r \geq 0$. Pokažimo, da je tedaj $c = (x^p - 1)/(x-1) - p \geq 0$. Iz

$$b - c = (x^r - x^p)/(x-1) + (p - r) = x^r(1 - x^{p-r})/(x-1) + (p-r)$$

dobimo oceno $b - c < 10^{-k}$, če upoštevamo $x^{p-r} \geq 1$ oz. $1 - x^{p-r} \leq 0$ in $p - r < 10^{-k}$. Torej je $c > b - 10^{-k} > -10^{-k}$. Ker to velja za vsak $k \in \mathbb{N}$, s števili $\{-10^{-k}\}$ pa se lahko poljubno približamo 0, sledi $c \geq 0$, to je (5). Iz dokaza je razvidno, da velja v primeru, ko je p racionalno število, enačaj v (3) le, če je $x = y^{q-1}$, to je $x^p = y^q$. Dokaz neenakosti (3) je tako končan.

Oglejmo si sedaj, kako Hölderjeva neenakost sledi iz Youngove neenakosti. Pišimo

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \quad \text{in} \quad B = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q} \; .$$

Če je $A = 0$ ali $B = 0$, potem je $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ali $y_1 = \ldots = y_n = 0$ in tedaj (2) velja. Zato smemo privzeti, da je $A > 0$ in $B > 0$. Če postavimo $X_k = x_k/A$ in $Y_k = y_k/B$ za $k = 1, 2, \ldots, n$, imamo $X_1^p + \ldots + X_n^p = 1$

in $Y_1^q + \ldots + Y_n^q = 1$. Youngova neenakost nam sedaj da oceno

$$\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k^p}{p} + \frac{Y_k^q}{q} \right) =$$

$$= \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^p \right) + \frac{1}{q} \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^q \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Od tod dobimo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q} .$$

S tem je Hölderjeva neenakost dokazana.

Neenakost Minkowskega sedaj hitro uženemo. Ker za $p = 1$ neenakost (1) očitno velja, smemo vzeti $p > 1$. Prav tako smemo privzeti, da niso vsi x_i in y_i enaki 0. Z uporabo Hölderjeve neenakosti dobimo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q} \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{1/q} .$$

Podobno imamo

$$\sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{1/q} .$$

Če zadnji neenakosti seštejemo, dobimo

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{1/q} .$$

Neenakost delimo z zadnjim faktorjem, ki je različen od 0 (zakaj?), upoštevamo $1 - 1/q = 1/p$, pa smo pri (1). Neenakost Minkowskega je tako dokazana.

Oglejmo si vse tri neenakosti v posebnem primeru $p = 2$. Ker je tedaj tudi $q = 2$, preide Youngova neenakost v znano neenačbo

$$xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

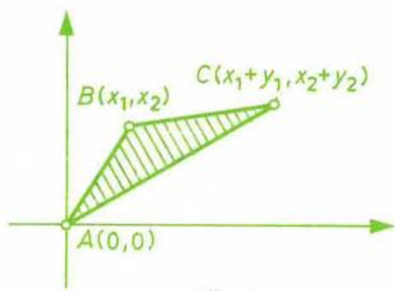
ki sledi tudi iz neenakosti $(x - y)^2 \geq 0$. V Hölderjevi neenakosti, ki se tedaj glasi

$$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 \leq \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right),$$

prepoznamo **Cauchyjevo neenakost**[4]. Neenakost Minkowskega pa je v primeru $p = 2$ znana **trikotniška neenakost** :

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}\,.$$

Zakaj se neenakost imenuje trikotniška, vidimo s slike 1, kjer smo zaradi enostavnosti vzeli $n = 2$. Koordinate točk na sliki so $A(0,0)$, $B(x_1, x_2)$ in $C(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Trikotniška neenakost je posledica naslednjega očitnega dejstva o razdaljah: razdalja med točkama A in C ni nikoli večja od vsote razdalj od A do B in od B do C. Grški matematik Evklid je o tem dejstvu že v tretjem stoletju pred našim štetjem zapisal naslednje: "To ve vsak osel. Postavi kopico sena v eno oglišče trikotnika in osla v drugega. Da bi dobil svoje seno, osel zanesljivo ne bo šel vzdolž dveh stranic."



Slika 1.

Končajmo z nalogami. Rešitve prvih treh nalog so elementarne, zadnji dve pa zahtevata poznavanje pojma odvoda oziroma integrala.

1. S pomočjo neenakosti Minkowskega pokaži, da za vsak $p \geq 1$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p \geq n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^p\,.$$

---

[4] V svoji knjigi "Cours d'analyse" jo je leta 1821 zapisal francoski matematik A.L.Cauchy.

2. Pokaži, da v Hölderjevi neenakosti velja enačaj natanko tedaj, ko obstajata taki nenegativni konstanti a in b, da je $a x_k^p = b y_k^q$ za vse $k = 1, 2, \ldots, n$.

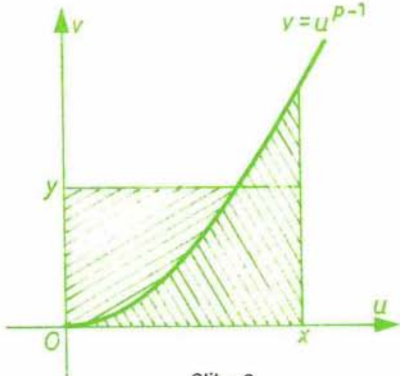
3. Dokaži, da v neenakosti Minkowskega velja enačaj tedaj in le tedaj, ko obstajata taki nenegativni konstanti a in b, da je $a x_k = b y_k$ za vse $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. S pomočjo funkcije $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definirane s predpisom

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x ,$$

podaj alternativni dokaz Youngove neenakosti ! (Namig: najprej se prepričaj, da je dovolj pokazati, da je $f(x) \geq 0$, in potem to tudi dokaži.)

5. Izračunaj ploščini likov pod in nad krivuljo $v = u^{p-1}$ oziroma $u = v^{q-1}$, kjer je $(p-1)(q-1) = 1$ (glej sliko 2) ! Ugotovi, kakšen je geometrijski pomen Youngove neenakosti !



Slika 2

Roman Drnovšek

IGRA "NIM*" – Rešitev s str. 295

Pri igri "NIM" je zmagovita pozicija, če igralec s svojo potezo doseže takšne vrednosti n_i $(n_i = \sum_j b_{ij} 2^j$ v binarnem zapisu), da je vsota $\sum_i b_{ij}$ soda za vsak j. Končna zmagovita pozicija je potem $n_i = 0$ za vsak i in nasprotnik ne more več narediti poteze (glej *Presek* **21** (1993-94)176).

Pri igri "NIM*" velja isto pravilo, dokler sta vsaj dva od $n_i > 1$. Če so vsi $n_i \leq 1$, je zmagovita pozicija (po izvršeni potezi), če je zasedb z $n_i = 1$ liho mnogo (v nasprotju z igro "NIM"). Kritična je torej pozicija (pred izvršeno potezo), ko je natanko en $n_i > 1$. V tem trenutku je treba prelomiti s pravili "NIM" in vzeti iz i-tega kupa bodisi vse kamne bodisi vse razen enega, tako da ostane liho mnogo kupov s po enim kamnom.

Mitja Rosina