PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 5
Strani 312–314

Janez Žerovnik:

PROBLEM ŠTIRIH BARV

Ključne besede: novice, matematika, grafi, problem štirih barv, računalništvo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1186-Zerovnik.pdf

NOVICE

PROBLEM ŠTIRIH BARV

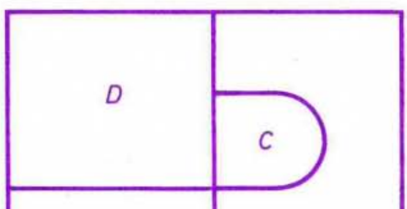
V knjigi K. Devlina "Nova zlata doba matematike" (knjiga je pred kratkim izšla v zbirki Sigma) so predstavljeni matematični problemi, ki so v zadnjih desetletjih iz tega ali onega razloga dvignili največ prahu med matematiki, pa tudi med 'nematematiki'. V enem od poglavij je opisana pot do dokaza izreka štirih barv, za katero je bilo potrebnih celih sto let.

Graf $G = (V, E)$ je matematični objekt, ki ga podamo z množico točk V in množico povezav (torej parov točk) E. Točki sta sosednji, če med njima poteka povezava. Barvanje grafa je preslikava, ki vsaki točki grafa priredi neko barvo. Za imena barv običajno zaradi enostavnosti vzamemo kar naravna števila. Dobro barvanje je tako, ki sosednje točke pobarva z različnimi barvami. Graf je k-pobarvljiv, če obstaja dobro barvanje s k ali manj barvami.

Nekaj več o grafih najdemo v Presekovi knjižici Najnujnejše o grafih, ki sta jo napisala Drago Bajc in Tomaž Pisanski. Posebej o barvanju grafov pa je Presek že pisal v prvi številki letnika 17 (1989/90).

Graf je ravninski, če ga je mogoče narisati v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka. Ali drugače povedano: povezave se lahko dotikajo samo v točkah grafa, drugje pa ne.

Pred dobrimi sto leti, natančneje leta 1852, je mladi angleški matematik Francis Guthrie domneval, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami, če zahtevamo, da je vsak par sosednjih držav pobarvan različno. Državi sta sosednji, če imata skupno mejo. Če se dve državi dotikata samo v eni točki, potem dovolimo, da sta pobarvani enako. Tako moramo na primer na sliki 1 pobarvati različno državi A in B, A in D, B in C, B in D ter C in D, medtem ko sta A in C lahko enake barve.

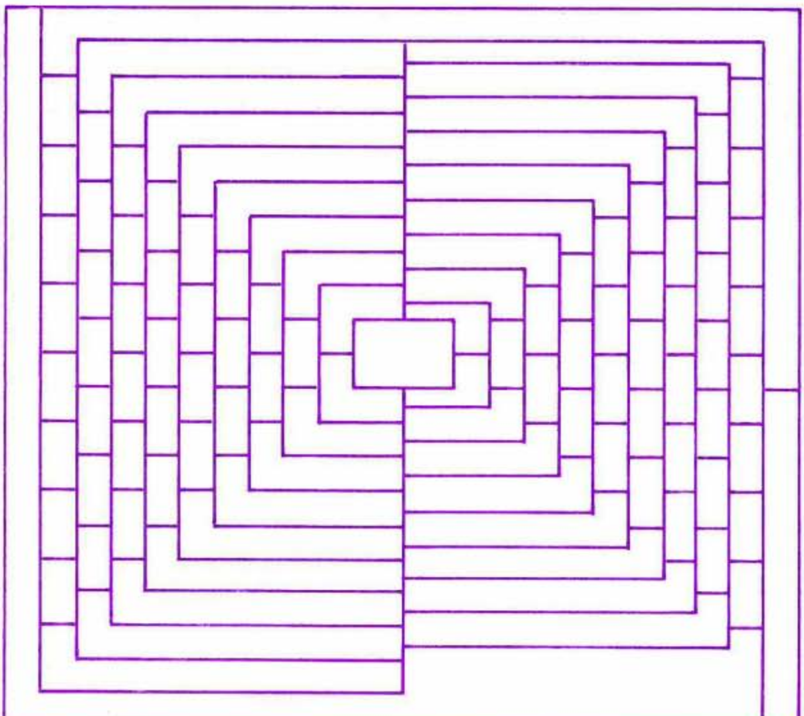


Slika 1.

Če si v vsaki državi izberemo glavna mesta tako, da gre proga med glavnima mestoma držav A in B samo po ozemlju držav A in B, dobimo graf. Vsak tako dobljeni graf se da narisati v ravnini tako, da se noben par povezav (železniških prog) ne seka zunaj glavnih mest. Tak graf je torej ravninski graf. Izkaže se, da poljubnemu zemljevidu ustreza neki ravninski graf in obratno: vsak ravninski graf lahko dopolnimo do zemljevida. Pri danem ravninskem grafu je takih zemljevidov lahko veliko, saj meje niso natanko določene. Vemo namreč samo to, da meja med dvema državama poteka nekje po ozemlju med obema glavnima mestoma. Zanimivo pa je naslednje: če je mogoče točke ravninskega grafa dobro pobarvati s k barvami, potem je tudi (vsak) pripadajoči zemljevid mogoče pobarvati s k barvami. Velja pa tudi obratno. Tako dobimo drugo obliko Guthrijeve domneve, ki so ji rekli tudi 'domneva štirih barv':

Vsak ravninski graf je mogoče pobarvati s štirimi barvami.

Preveriti, ali je ta domneva pravilna, je bil slavni 'Problem štirih barv'. Za dokaz te, na videz tako enostavne trditve je bilo potrebno ogromno truda mnogih matematikov. Tudi mnogi ljubitelji so poskušali, saj vsaj za



Slika 2.

razumevanje problema res ni potrebno veliko predznanja. Morda ni brez smisla vprašanje, koliko časa bi ljudje še potrebovali, če se ne bi v tem stoletju pojavili računalniki. Za dokaz, ki obsega več kot 600 strani knjige, so pri preverjanju mnogih podprimerov izdatno pomagali računalniški programi, ki so jih razvili Appel, Haken in Koch. Tudi njihovo delo je trajalo nekaj let, dokler niso leta 1976 objavili dokaza.

Od leta 1976 lahko Guthrijevi domnevi rečemo Izrek štirih barv. Sedaj je torej znano, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami. Seveda pa to ni vedno lahko. Predlagam vam, da svoje sposobnosti preizkusite na zemljevidu na sliki 2, ki ga je Martin Gardner objavil v prvoaprilski številki revije Scientific American leta 1975. (Takrat Appel in Haken še nista objavila svojega dokaza.) Ob zemljevidu je pisalo, da je ta zemljevid protiprimer za domnevo štirih barv. Resnici na ljubo je zemljevid precej 'zapleten'. Ker pa vemo, da so štiri barve dovolj, barvanje s štirimi barvami gotovo obstaja. Poskusite! S prijatelji si lahko omislite majhno tekmovanje. Poglejte na uro in vsak naj se spopade s svojo kopijo zemljevida na sliki 2. Kdo bo prvi?

Če boste polja (države) na zemljevidu pobarvali z izbranimi barvami, lahko dobite prav zanimive 'vzorce'. Pošljite jih Preseku, najlepše bomo nagradili!

Janez Žerovnik

NALOGE S 24. MEDNARODNE FIZIKALNE OLIMPIADE V ZDA

24. mednarodna fizikalna olimpiada je bila od 10. do 18. julija 1993 v Williamsburgu, enem najstarejših mest Združenih držav. Na njej je nastopilo tudi pet slovenskih dijakov in doseglo lep uspeh, saj sta dva dijaka dosegla tretjo nagrado, eden je bil pohvaljen in tudi ostala dva udeleženca sta se povsem približala meji za pohvalo. Poročilo o olimpiadi smo objavili v letošnji tretji številki Preseka. Tokrat objavljamo nekoliko skrajšano inačico nalog s tega tekmovanja; podrobnejši opis nalog in rešitve si lahko bralci ogledajo v reviji Physics Today (November 1993). Prvi tekmovalni dan so dijaki reševali tri teoretične naloge, za kar so imeli pet ur časa, drugi tekmovalni dan pa dve eksperimentalni nalogi, za vsako so imeli dve uri in pol. Vsaka naloga je prinesla največ deset točk. Najboljši tekmovalec je dosegel le malo več kot 40 točk, čeprav je vsako od nalog vsaj en tekmovalec rešil v celoti. Dijaki so bili najbolj uspešni pri prvi eksperimentalni nalogi, daleč najtežja je bila tretja teoretična naloga.