PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 4
Strani 216–222

Jože Grasselli:

ZAPIS ŠTEVIL V NEGATIVNI OSNOVI

Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1185-Grasselli.pdf

ZAPIS ŠTEVIL V NEGATIVNI OSNOVI

Če preberemo stavek: Šolo obiskuje 307 učencev, ob številu 307 pomislimo, da je okrajšava za

$$3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7.$$

Pravimo, da je število 307 zapisano z osnovo 10 ali v desetiškem sestavu. V vsakdanji rabi srečujemo števila zmeraj podana na tak način. Moremo pa namesto 10 za osnovo vzeti katero koli od 1 različno naravno število. O tem govori naslednja ugotovitev, ki je bralcu najbrž poznana:

A. Če je b od 1 večje naravno število, se vsako naravno število a enolično izrazi v obliki

$$a = c_t b^t + c_{t-1} b^{t-1} + \cdots + c_1 b + c_0, \tag{1}$$

kjer so števke (cifre) $c_0, c_1, \ldots, c_{t-1}, c_t$ vzete izmed vrednosti $0, 1, \ldots, b-1$ in je $c_t > 0$.

Podobno kot pri osnovi 10 tudi v izrazitvi (1) obdržimo le števke in pišemo

$$a = c_t c_{t-1} \ldots c_1 c_{0\,(b)}. \tag{2}$$

Iz $307 = 2 \cdot 11^2 + 5 \cdot 11 + 10$ najdemo $307 = 25(10)_{(11)}$. Števko 10 smo dali v oklepaj, saj 2510 v osnovi 11 pomeni $2 \cdot 11^3 + 5 \cdot 11^2 + 1 \cdot 11 = 3278$. Tako je treba ravnati z vsako več kot enomestno števko.

Ob ugotovitvi A se vsiljuje vprašanje: Ali smemo za osnovo izbrati negativno celo število n? Števke so potem $0, 1, \ldots, |\, n \,| -1$; ker naj bodo med njimi od nič različne vrednosti, mora biti $n < -1$.

Oglejmo si za začetek, kako je z osnovo $n = -2$. Enakosti

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 0\\
3 &= 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 1\\
-1 &= 1 \cdot (-2) + 1\\
-2 &= 1 \cdot (-2) + 0\\
-3 &= 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) + 1
\end{aligned} \tag{3}$$

povedo, da imajo $1, 2, 3, -1, -2, -3$ v osnovi -2 izrazitve

$$\begin{array}{ll} 1 = 1_{(-2)} & -1 = 11_{(-2)} \\ 2 = 110_{(-2)} & -2 = 10_{(-2)} \\ 3 = 111_{(-2)} & -3 = 1101_{(-2)} \end{array} \tag{4}$$

Sedaj bomo pokazali, da se dá vsako od nič različno celo število enolično zapisati z osnovo -2. Naslonili se bomo na indukcijo in izrek o deljenju.

Izhajajmo iz privzetka, da smo našli izrazitev v osnovi -2 za števila

$$-a, -a+1, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, a-1, a, \tag{5}$$

kjer je a neko naravno število in $a \geq 3$.

Število $a+1$ delimo z -2 in dobimo za količnik od nič različno celo število k, ostanek r pa je 0 ali 1. To pomeni, da je

$$a + 1 = (-2)k + r; \quad 0 \leq r < 2 \tag{6}$$

in od tod

$$| k | = \left| \frac{a+1-r}{-2} \right| = \frac{| a+1-r |}{| -2 |} \leq \frac{a+1}{2}.$$

Za $a > 1$ je izpolnjena ocena $\frac{a+1}{2} < a$. Ker imamo $a \geq 3$, je torej $| k | \leq \frac{a+1}{2} < a$. Vidimo, da je število k zajeto v (5). Zato ima zapis

$$k = c'_j(-2)^j + c'_{j-1}(-2)^{j-1} + \cdots + c'_1(-2) + c'_0$$

pri števkah $c'_0, \ldots, c'_{j-1}$, ki so 0 ali 1, in $c'_j = 1$. Ko k vnesemo v (6), je

$$a + 1 = c_{j+1}(-2)^{j+1} + c_j(-2)^j + \cdots + c_1(-2) + c_0$$

pri števkah

$$c_{j+1} = c'_j = 1, c_j = c'_{j-1}, \ldots, c_1 = c'_0, c_0 = r$$

in našli smo za število $a+1$ izrazitev z osnovo -2.

Podobno daje delitev negativnega celega števila $-a-1$ z -2

$$-a - 1 = (-2)k' + r'; \quad 0 \leq r' < 2. \tag{7}$$

Količnik k' je od nič različno celo število, ostanek r' je 0 ali 1. Zaradi $a \geq 3$ je

$$| k' | = \left| \frac{-a-1-r'}{-2} \right| \leq \frac{a+1+1}{2} = \frac{a}{2} + 1 < a.$$

Po tej oceni je k' eno od števil v (5), zato izrazljivo z osnovo -2 in potem po (7) tudi $-a-1$ tako izrazljiv.

Prišli smo do ugotovitve:

B. Če so števila v (5) izrazljiva z osnovo -2, sta tudi števili $a+1$, $-a-1$ tako izrazljivi.

Če je $a = 3$, so v (5) števila $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ in zanja imamo v (3) oz. (4) izrazitev v osnovi -2. Po ugotovitvi B potem 4 in -4 lahko zapišemo z osnovo -2. V (5) smemo torej vzeti $a = 4$ in po ugotovitvi B sledi, da je mogoče tudi 5 in -5 izraziti z osnovo -2. Ko tako nadaljujemo, vidimo, da premore vsako od nič različno celo število izrazitev z osnovo -2.

Prepričajmo se še o enoličnosti zapisa. Recimo, da se od nič različno celo število m izraža

$$m = c_s(-2)^s + \cdots + c_1(-2) + c_0 \quad \text{in} \quad m = c_t'(-2)^t + \cdots + c_1'(-2) + c_0'$$

in je $s \leq t$. Po odštetju dobimo

$$c_t'(-2)^t + \cdots + c_1'(-2) - c_s(-2)^s - \cdots - c_1(-2) = c_0 - c_0'. \tag{8}$$

Na levi je sodo število, saj so vsi sumandi sodi. Zato je tudi število na desni $c_0 - c_0'$ sodo. Ker sta za c_0, c_0' mogoči le vrednosti 0, 1, je $c_0 - c_0'$ lahko le $-1, 0, 1$. Od teh števil je edino 0 sodo število. Torej je $c_0 - c_0' = 0$ in $c_0 = c_0'$. V (8) stoji tako na desni 0. Krajšamo z -2 in imamo

$$c_t'(-2)^{t-1} + \cdots + c_2'(-2) - c_s(-2)^{s-1} - \cdots - c_2(-2) = c_1 - c_1'.$$

Spet je na levi sodo število, zato število $c_1 - c_1'$ sodo in kot prej nujno $c_1 = c_1'$. Ravno tako doženemo $c_2 = c_2', \ldots, c_s = c_s'$. Pri $t > s$ bi veljalo

$$c_t'(-2)^{t-s-1} + \cdots + c_{s+1}' = 0. \tag{9}$$

To pa ne gre. Ker je $c_t' = 1$, je pri sodem eksponentu $t-s-1$ število na levi v (9) pozitivno, pri lihem $t-s-1$ pa negativno. Mora torej biti $t = s$ in izrazitev je enolična.

Strnimo najdeno v ugotovitev:

C. Vsako od nič različno celo število a se izrazi z osnovo -2 enolično na način

$$a = c_s(-2)^s + c_{s-1}(-2)^{s-1} + \cdots + c_1(-2) + c_0, \tag{10}$$

pri čemer so števke $c_0, \ldots, c_s$ vzete izmed vrednosti $0, 1$ in je $c_s = 1$. Na kratko (10) zapišemo

$$a = c_s c_{s-1} \cdots c_1 c_{0\,(-2)}. \tag{11}$$

Iz zgornje izpeljave povzemamo, da vodi k izrazitvi (10) izrek o deljenju z -2, naveden v (6) in (7). Razvijmo za zgled število -35. Računamo

$$\begin{aligned} -35 &= (-2)\cdot 18 + 1 \\ 18 &= (-2)\cdot(-9) + 0 \\ -9 &= (-2)\cdot 5 + 1 \\ 5 &= (-2)\cdot(-2) + 1 = (-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Zadnja enakost daje za 5 izrazitev v osnovi -2. Ko jo upoštevamo v predzadnji enakosti, dobimo -9 zapisan v osnovi -2. Ko tako napredujemo navzgor, dobimo

$$\begin{aligned} -9 &= (-2)^3 + (-2) + 1 \\ 18 &= (-2)^4 + (-2)^2 + (-2) \\ -35 &= (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

ali $-35 = 101101_{(-2)}$.

Kako seštevamo števila, podana v obliki (11)? Vemo, kako ravnamo v desetiškem zapisu: Števila pišemo drugo pod drugim in seštevamo števke po stolpcih, začenši na skrajni desni. Ko dosežemo v stolpcu števk vsoto 10, štejemo ena "naprej", torej v naslednjem stolpcu. V primeru osnove -2 upoštevamo, da je

$$(-2)^j + (-2)^j = -(-2)^{j+1} \quad \text{za} \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Za vsaki dve števki 1 v j-tem stolpcu je po (12) treba število števk, enakih 1 v stolpcu $j+1$, zmanjšati za ena. Drugače povedano: Po dve števki 1 v j-tem stolpcu "uničita" eno števko 1 v stolpcu $j+1$. Če v stolpcu $j+1$ ni števk 1, ali pa so se vse števke 1 že uničile, upoštevamo, da iz $2 = (-2)^2 + (-2)$ sledi

$$(-2)^j + (-2)^j = 2(-2)^j = (-2)^{j+2} + (-2)^{j+1} \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Po dve števki 1 v j-tem stolpcu zdaj zaradi (13) nadomestimo s številom 110...0, ki ima j ničel, in to število zapišemo ot nadaljnji seštevanec k prejšnjim seštevancem. V zgledu

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cancel{1} & 1 & 0 & \underline{\underline{1}} & 0 & \underline{1} \\ & & \cancel{1} & 0 & \underline{\underline{\underline{1}}} & \underline{\underline{\underline{1}}} & \underline{1} & \underline{1} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

se enako podčrtane števke uničijo, namesto prečrtanih števk smo glede na (13) dodali seštevanec 11000000.

Ker imamo samo števki 0, 1 in je $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, preide množenje števil (11) na seštevanje. Zgled:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & \underline{1} & \underline{1} & 0 & 1 & & & \\ & & & \underline{1} & 1 & 0 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \end{array}$$

Odštevanje dveh števil (11) teče običajno, če sta v istem stolpcu enaki števki, ali pa ima zmanjševanec števko 1, odštevanec števko 0. Je pač $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$. Kadar ima zmanjševanec števko 0 in odštevanec v istem stolpcu števko 1, si pomagamo po (12) takole

$$-(-2)^j = (-2)^{j+1} + (-2)^j \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Namesto da bi odšteli število 10...0, kjer za 1 stoji $j-1$ ničel, lahko glede na (14) prištejemo 110...0, kjer za 11 pride $j-1$ ničel. Po tej opazki je mogoče odštevanje prevesti kar na seštevanje. Hitreje pridemo do cilja, če v stolpcih, kjer se gladko odšteva, to napravimo, nato po potrebi uporabimo (14). Zgled:

$$-\begin{array}{r} 1101010 \\ 1110011 \end{array} \longrightarrow -\begin{array}{r} 1001000 \\ 10001 \end{array} \longrightarrow +\left\{ \begin{array}{r} 1001000 \\ 11 \\ \underline{110000} \\ 1111011 \end{array} \right.$$

Obkrožili smo stolpce, v katerih je bilo mogoče takoj odštevati. Namesto da bi odšteli 1, smo po (14) prišteli 11, namesto da bi odšteli 10000, smo po (14) prišteli 110000.

Še pripomba o negativni osnovi n, manjši od -2. Enakosti

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |n|-1 &= |n|-1 \\ |n| &= 1\cdot n^2 + (|n|-1)n + 0 \\ |n|+1 &= 1\cdot n^2 + (|n|-1)n + 1 \\ -1 &= 1\cdot n + (|n|-1) \\ -2 &= 1\cdot n + (|n|-2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n &= 1\cdot n + 0 \\ n-1 &= 2\cdot n + (|n|-1) \end{aligned}$$

kažejo, da se števila $n-1, n, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, |n|, |n|+1$ izrazijo v osnovi n. Z indukcijo in izrekom o deljenju čisto podobno kot pri $n=-2$ izpeljemo ugotovitev:

D. Naj bo n izbrano negativno celo število, manjše od -1. Vsako od nič različno celo število a enolično izrazimo v obliki

$$a = c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \cdots + c_1 n + c_0. \tag{15}$$

Števke $c_0, \ldots, c_t$ so vzete izmed vrednosti $0, 1, \ldots, |n|-1$ in $c_t > 0$.

Namesto (15) pišemo krajše

$$a = c_t c_{t-1} \ldots c_1 c_{0\,(n)}. \tag{16}$$

Do izrazitve (15), (16) pripelje zaporedno deljenje z n. Razvoj števila -3841 v osnovi -12 dobimo iz

$$\begin{aligned} -3841 &= (-12)\cdot 321 + 11 \\ 321 &= (-12)\cdot(-26) + 9 \\ -26 &= (-12)\cdot 3 + 10 \end{aligned}$$

Velja torej $-3841 = 3(10)9(11)_{(-12)}$.

Videli smo, kako seštevamo in množimo števila, zapisana s števkami v osnovi -2. Podobna pravila veljajo za seštevanje in množenje števil, danih v obliki (16). Množenje lahko izvršimo tudi le prek seštevanja.

Naloge:

1. V desetiškem zapisu imamo števila $500, 1021, -2035$. Izrazi jih z osnovo -2.

2. V osnovi -2 so dana števila $11011010, 110111011, 1001110101$. Seštej jih in izid preveri z računom v desetiškem sestavu.

3. Števila $1101, 1110, 11010$ so zapisana v osnovi -2. Zmnoži jih in izid preveri z računom v desetiškem sestavu.

4. Števila $591, -1025, 2141$, dana v desetiškem sestavu, izrazi v osnovi -12.

5. Poišči zapis števila a v osnovi -7 in -12, če je $a = 101101101_{(-2)}$.

6. Poišči zapis števila a v osnovi -13 in -20, če je $a = 21402_{(-5)}$.

7. Za negativno osnovo n je

$$
\begin{aligned}
|\, n \,|\, n^j &= -\, n^{j+1} \\
|\, n \,|\, n^j &= n^{j+2} + (|\, n \,| - 1) n^{j+1}
\end{aligned}
$$

pri $j = 0, 1, 2, \ldots$. Kako od tod dobimo pravilo za seštevanje števil oblike (16)?

Jože Grasselli

GEOMETRIJSKA ZA OSNOVNOŠOLCE - Rešitev s str. 183

Za vse tri zastavljene naloge je osrednja ideja reševanja skupna. Prikažimo jo na primeru šestih včrtanih krožnic.

Manjše krožnice imajo središča v ogliščih pravilnega šestkotnika, pri čemer se dve sosednji krožnici dotikata v razpolovišču tiste šestkotnikove stranice, ki veže njuni središči (slika 1). Polmer dane krožnice je R; označimo še z ρ polmer manjših krožnic in z r polmer šestkotniku očrtane krožnice. Velja:

$$r = 2\rho.$$

S slike 1 razberemo:

$$SB = SA + AB,$$

torej $R = r + \rho$ in zato $R = 3\rho$.