PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 3
Strani 130–134

Lejla Marek – Crnjac:

POGLEJMO FRAKTALE

Ključne besede: matematika, fraktali.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1174-Marek.pdf

POGLEJMO FRAKTALE

V tem članku bomo poskusili predstaviti fraktale. Zgledi bodo preprosti in vse bo temeljilo na znanju, ki ga pridobijo učenci v srednji šoli.

Prvi zgled naj bo trikotnik Sierpinskega. Poglejmo najprej konstrukcijo takega trikotnika. Vzemimo črn enakostraničen trikotnik s stranico dolžine 1, razpolovimo stranice in jih povežimo. Srednji trikotnik odstranimo tako, da bo sredina bela. Nadaljujmo s postopkom v treh črnih vogalnih trikotnikih. Postopek ponavljamo in po vsaki delitvi dobimo manjše trikotnike. Končni rezultat je tako imenovani trikotnik Sierpinskega (trikotno sito).

Slika 1. Konstrukcija trikotnika Sierpinskega

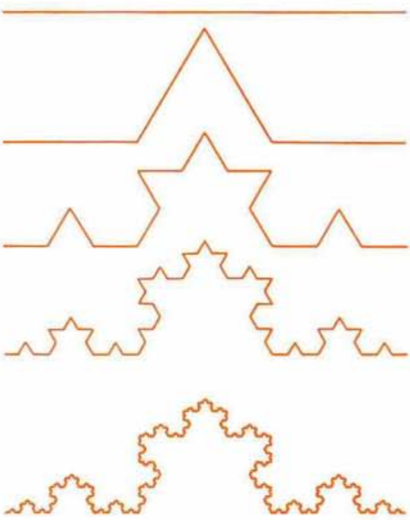
Drugi zgled naj bo tako imenovana kvadratna preproga ali preproga Sierpinskega. Vzemimo kvadrat s stranico dolžine 1 in ga pobarvajmo črno. Stranice kvadrata tretjinimo in jih povežimo. Dobimo devet kvadratov s stranicami dolžine ene tretjine. Osem robnih kvadratov pobarvajmo črno, srednji naj ostane bel. Postopek nadaljujemo samo na osmih robnih kvadratih. Končni rezultat je kvadratna preproga.

Slika 2. Konstrukcija preproge Sierpinskega

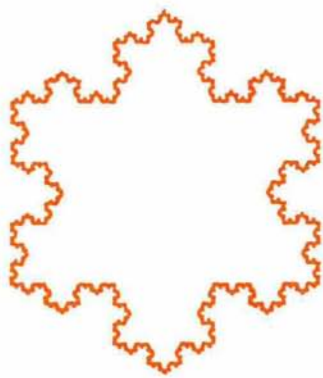
Naslednji zgled, ki ga bomo navedli, je konstrukcija drevesa. Narišimo osnovno vejo (deblo), na koncu veje pa dve novi velji s polovično dolžino prvotne, med vejami je kot 120°. Postopek nadaljujemo in končni rezultat je drevo.

Slika 3. Konstrukcija drevesa

Zadnja zgleda naj bosta Kochova krivulja in Kochova snežinka. Kochovo krivuljo konstruiramo tako, da vzamemo enotski interval, interval z dolžino 1, ki ga tretjinimo in odvzamemo srednjo tretjino. Srednji kos nadomestimo s stranicama enakostraničnega trikotnika dolžine ene tretjine. Postopek nadaljujemo, dokler se ne približamo končni krivulji, imenovani Kochova krivulja. Podobna je konstrukcija Kochove snežinke, ki jo dobimo tako, da postopek pri Kochovi krivulji ponavljamo na enakostraničnem trikotniku s stranico dolžine 1. Na vsaki stranici ponavljamo postopek tako dolgo, da dobimo na vsaki stranici tri Kochove krivulje, ki sestavljajo Kochovo snežinko.



Slika 4. Konstrukcija Kochove krivulje



Slika 5. Kochova snežinka

Kochova snežinka ima končno ploščino. Poskušajmo jo izračunati. Ploščino sestavljajo ploščine enakostraničnih trikotnikov. Začetni enakostranični trikotnik s stranico dolžine 1, ima ploščino $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Po tretjinjenju vsaki stranici trikotnika vrinemo enakostraniccni trikotnik s stranico $\frac{1}{3}$ in ploščino $(\frac{1}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Po ponovnem tretjinjenju na vseh štirih odsekih vsake stranice trikotnika vrinemo štiri enakostranične trikotnike s stranicami $\frac{1}{9}$ in ploščino $(\frac{1}{9})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Postopek ponavljamo in dobimo konvergentno geometrijsko vrsto. Vsota te vrste je ploščina Kochove snežinke, $S = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Račun poteka tako:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(4^0(\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 4^1(\frac{1}{9})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 4^2(\frac{1}{27})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \dots\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{K=1}^{\infty} 4^{K-1}(\frac{1}{9})^K = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}\sum_{K=1}^{\infty}(\frac{4}{9})^K =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{4^2}\cdot\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \frac{3}{5}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

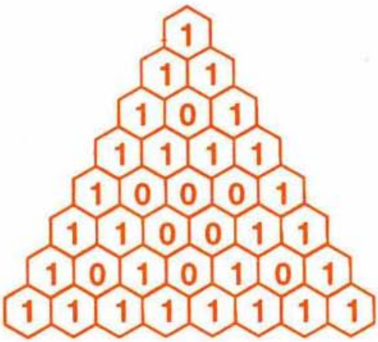
Pascalov trikotnik

Pascalov trikotnik dobimo tako, da v obliki trikotnika razvrstimo koeficiente, ki jih dobimo iz binomske formule za $(x + y)^n$, pri čemer eksponent narašča od 0 do $n, n \in \mathbb{N}$. Prvo število v Pascalovem trikotniku je 1, to označimo z vrsto 0. Vsako število v naslednji vrstici je vsota števil iz prejšnje vrstice, ki sta nad njim. Trikotnik se izredno hitro veča in tudi števila v njem se naglo večajo.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	....

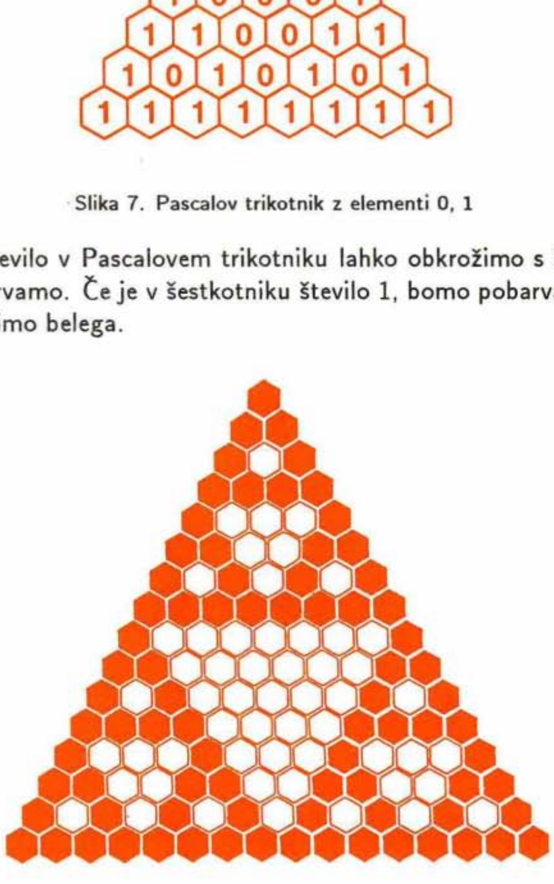
Slika 6. Pascalov trikotnik

Števila v Pascalovem trikotniku so soda in liha. Pascalov trikotnik prepišimo tako, da liha števila označimo z 1, soda z 0.



Slika 7. Pascalov trikotnik z elementi 0, 1

Vsako število v Pascalovem trikotniku lahko obkrožimo s šestkotniki in primerno obarvamo. Če je v šestkotniku število 1, bomo pobarvali črno, če je pa 0, ga pustimo belega.



Slika 8. Konkstrukcijski korak v nastanku trikotnika Sierpinskega

Tako smo na presenetljiv način ponovno prišli do trikotnika Sierpinskega. Trikotnik Sierpinskega lahko poljubno večamo. V vrsticah 2^K, $K = 0, 1, 2, \ldots$, so sama liha števila in so črne barve. Prav tako so robovi trikotnika črni, ker so enice v Pascalovem trikotniku na robu. Poglejmo si nastanek belih trikotnikov po sredini trikotnika Sierpinskega. Vsak naslednji trikotnik je večji od prejšnjega. Trikotniki, ki nastajajo na strani teh sredinskih, so simetrični že prej nastalim.

Napišimo sedaj preprost algoritem za nastanek trikotnikov po sredini trikotnika Sierpinskega.

V vrsticah 2^K+1, $K = 1, 2, \ldots$, dobimo 2^K-1 sodih števil, ki so strnjena v stranico belega trikotnika.

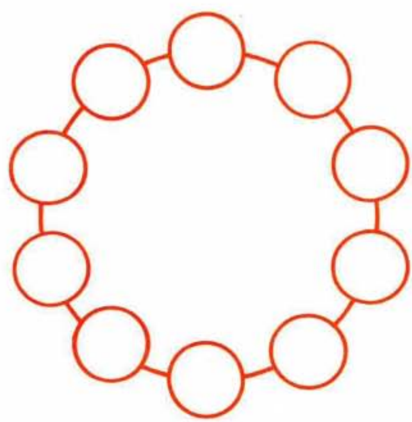
Npr.: $K = 1, 2^1 + 1 = 3, 2^1 - 1 = 1$. V tretji vrstici imamo eno sodo število.

$K = 2, 2^2 + 1 = 5, 2^2 - 1 = 3$. V peti vrstici imamo tri soda števila, ki so strnjena v stranico trikotnika. Vsaki naslednji vrstici odvzamemo eno sodo število. Ker je trikotnik enakostraničen, leži v treh vrstah. Na strani novega belega trikotnika ležita simetrična trikotnika, ki sta enaka tistemu, ki smo ga dobili pri $K = 1$.

$K = 3, 2^3 + 1 = 9, 2^3 - 1 = 7$. V deveti vrstici imamo sedem strnjenih sodih števil, ki tvorijo stranico trikotnika. Vsaki vrstici odvzamemo eno sodo število in tako nastaja nov trikotnik, ki leži v sedmih vrstah. Na strani novega trikotnika ležita simetrična trikotnika, ki sta enaka tistemu, ki smo ga dobili pri $K = 1$ in $K = 2$. Postopek ponavljamo in trikotnik Sierpinskega se povečuje.

Leila Marek-Crnjac

ŠTEVILSKI KROG



V kržce, ki so razporejeni vzdolž krožnice, vpišite različna naravna števila od 1 do 10, tako da ne bo vsota poljubnih dveh sosednjih števil nikoli deljiva ne s 3, ne s 5 in ne s 7.

Koliko rešitev ima naloga?

Marija Vencelj