PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 2
Strani 82–85

Bogdan Kejžar:

EULERJEVA FUNKCIJA φ

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1169-Kejzar.pdf

EULERJEVA FUNKCIJA φ

Govorili bomo o funkciji iz teorije števil, ki nosi ime velikega matematika Eulerja. Leonhard Euler je živel v 18. stoletju in je delal ter ustvarjal na vseh področjih uporabne in teorijske matematike. Sodi med najplodnejše matematike vseh časov.

Eulerjeva funkcija φ preslikuje naravna števila v naravna števila. Vrednost funkcije pri danem naravnem številu n je definirana takole: Med števili 1, 2, 3, ... n poiščemo vsa z n tuja števila, jih preštejemo in rezultat je $\varphi(n)$.

Torej, vrednost $\varphi(n)$ nam pove, koliko je pod n števil, ki so tuja z n.

Navedimo nekaj primerov: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(7) = 6$ in $\varphi(10) = 4$, saj so števila 1, 3, 7 in 9 tuja z 10.

Naloga 1. *Izračunaj* $\varphi(5)$, $\varphi(8)$, $\varphi(17)$ *in* $\varphi(18)$.

Sedaj pa izračunajmo še $\varphi(40)$. Število 40 razstavimo na praštevila: $40 = 2^3 \cdot 5$. To nam pove, da je neko število tuje s 40, če ni deljivo niti z 2 niti s 5. Med števili 1, 2, 3, ... 40 jih je polovica (vsako drugo število), to je 20, deljivih z 2. Vsako peto število po vrsti je deljivo s 5, zato jih je petina (torej 8) deljivih s 5. Štiri števila pa so deljiva z 2 in s 5 hkrati, saj je vsako deseto število po vrsti deljivo z 2 in s 5. Zato je $20 - 4 = 16$ števil deljivih samo z 2 in ne s 5, $8 - 4 = 4$ pa je deljivih s 5 in ne z 2. Torej je s 5 ali z 2 (vsaj z enim od teh dveh števil) deljivih natanko $16 + 4 + 4 = 24$ števil. Zato je $\varphi(40) = 40 - 24 = 16$.

Naloga 2. *Izračunaj* $\varphi(55)$ *in* $\varphi(63)$.

Vrednost $\varphi(315)$ pa izračunajmo skupaj. Najprej število 315 razstavimo na produkt samih praštevil: $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Razcep nam pove da je neko število tuje s 315 natanko tedaj, ko ni deljivo z nobenim od števil 3, 5 in 7. Vrednost $\varphi(315)$ bomo poiskali tako, da bomo med števili 1, 2, 3, ... 315 "prečrtali" najprej vsa števila, ki so deljiva s 3, nato med preostalimi še neprečrtanimi vsa tista, ki so deljiva s 5, in končno še vsa, ki so deljiva s 7. Ostala bodo samo še števila tuja s 315.

Ko med števili 1, 2, 3, ... 315 prečrtamo števila, ki so deljiva s 3, to so števila $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$, ... $\frac{315}{3} \cdot 3$, ostane še

$$315 - \frac{315}{3} = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3})$$

števil.

Sklep 1. *Če med prvimi 315 števili prečrtamo vsa s 3 deljiva števila, potem ostane še* $315 \cdot (1 - \frac{1}{3})$ *neprečrtanih števil.*

Preštejmo, koliko je v tem ostanku števil, ki so deljiva s 5. Vsa števila (med prvimi tristo petnajstimi) deljiva s 5 so $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... $\frac{315}{5} \cdot 5$. Med temi števili so bila v prvem koraku prečrtana vsa s 3 deljiva števila. To je natanko toliko števil, kolikor je med števili 1, 2, 3, ... $\frac{315}{5}$ takih, ki jih 3 deli. Ostalo je torej še (glej **Sklep 1.** - namesto 315 vzameš $\frac{315}{5}$) $\frac{315}{5} \cdot (1 - \frac{1}{3})$ števil deljivih s 5. Prečrtamo še ta in ostane

$$315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) - \frac{315}{5} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5})$$

števil.

Sklep 2. *Ko med prvimi 315 števili prečrtamo vsa števila, ki so deljiva s 3 ali s 5, ostane še* $315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5})$ *števil.*

Sedaj pa poglejmo, koliko večkratnikov števila 7 moramo še prečrtati. Med prvimi tristopetnajstimi števili so deljiva s 7 naslednja: $1 \cdot 7$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, ... $\frac{315}{7} \cdot 7$. V prvih dveh korakih smo med temi števili prečrtali vsa števila deljiva s 3 in s 5. Med njimi je ostalo še (**Sklep 2.**) natanko $\frac{315}{7} \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5})$ neprečrtanih števil. Ko prečrtamo še ta, nam ostane

$$315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) - \frac{315}{7} \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{7})$$

števil. Ta števila so tuja s 315 in zato je

$$\varphi(315) = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{7}) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 144.$$

Naloga 3. *Podobno kot zgoraj izračunaj $\varphi(1000)$, $\varphi(1001)$ in $\varphi(770)$.*

Razstavimo število n na produkt različnih praštevilskih potenc:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k}.$$

S pomočjo tega razcepa izračunajmo $\varphi(n)$. Najprej med števili 1, 2, 3, ... n odvržemo vsa, ki so deljiva s p_1. Ostane še

$$n - \frac{n}{p_1} = n(1 - \frac{1}{p_1})$$

števil. Sedaj med preostalimi odvržemo tista, ki so deljiva s p_2 in niso hkrati deljiva s p_1. Števila, ki so deljiva hkrati s p_1 in s p_2, smo odvrgli že na prejšnem koraku. Tako nam po drugem koraku ostane še

$$n(1 - \frac{1}{p_1}) - \frac{n}{p_2}(1 - \frac{1}{p_1}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})$$

števil.

Med preostalimi števili nato odvržemo tista števila, ki so deljiva s p_3. To so natanko tista števila med števili 1, 2, 3, ... n, ki so deljiva s p_3 in niso deljiva niti s p_1 niti s p_2. Ostane še

$$n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) - \frac{n}{p_3}(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3})$$

števil. Ta postopek nas po k korakih, ko nam ostanejo samo še z n tuja števila, pripelje do formule:

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}).$$

Ob upoštevanju razcepa števila n na prafaktorje lahko to formulo zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{e_1 - 1} \cdots p_k^{e_k - 1}.$$

Naloga 4. *S pomočjo pravkar izpeljane formule preveri rezultate, ki si jih dobil pri prejšnih nalogah.*

Naloga 5. *Dokaži, da velja*

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2),$$

če sta števili n_1 in n_2 med seboj tuji.

Za bralce, ki poznajo osnove verjetnostnega računa, dodajmo še nalogo, ki jim bo razkrila še eno razlago formule za $\varphi(n)$.

Naloga 6. *Izračunaj verjetnost dogodka, da na slepo izbereš iz množice prvih n naravnih števil število, ki je tuje z n.*

Bogdan Kejžar

KAKO PREČKATI REKO?

Skupina petih raziskovalcev stoji na enem bregu divje reke, na drugem bregu pa je skupina petih divjaških bojevnikov. Vsi bi radi prečkali reko, na voljo pa imajo le majhen kanu za tri osebe, ki je na strani bojevnikov. Samo en bojevnik in en raziskovalec znata dovolj dobro veslati, da lahko kanu varno pripeljeta čez deročo vodo. Bojevniki so seveda bojevito razpoloženi in zato bi bilo za raziskovalce skrajno nezdravo, če bi bilo število bojevnikov kadarkoli med prečkanjem na kateremkoli bregu ali pa v čolnu večje od števila raziskovalcev. Ali lahko (in kako) obe skupini varno prečkata reko?

Neža Mramor-Kosta

SKORAJ MAGIČNI KROGI

V krožce vpišite različna enomestna naravna števila, tako da boste v vsakem od štirih večjih krogov dobili vsoto 19 in na vsaki od diagonal vsoto 9.

Marija Vencelj