PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 2
Strani 98–105

Bojan Hvala:

VOLILNA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1169-Hvala.pdf

MATEMATIKA

VOLILNA ŠTEVILA

1. O volitvah in vedno bolj omejenem kralju

V otoški državi Mali Bilandiji je kralj razpisal parlamentarne volitve. Za oblast se potegujeta dve stranki. Prva je stranka ENS, ki ji ljudje rečejo stranka enistov, druga pa stranka ZRS, ki se je je oprijelo šaljivo ime stranka zeristov. Enisti imajo nedvomno boljšo politično ekipo, vendar pa mnogi menijo, da predsednik stranke ni bil najbolj posrečeno izbran. Zato je upravni odbor enistov sprejel naslednji sklep: če se bo med štetjem glasov v katerem koli trenutku v vodstvu znašla stranka zeristov, bodo predsednika zamenjali.

Volitve so mimo. Zmagala je stranka enistov, ki je zbrala 11.079 glasov. Zeristi so zbrali 6.340 glasov.

Kolikšna je verjetnost, da je predsednik enistov obdržal svoj položaj?

Naloge se bomo lotili nekoliko splošneje. Denimo, da je za eniste glasovalo n, za zeriste pa $n-k$ volilcev ($n \geq k \geq 0$). Skupaj je torej glasovalo $2n-k$ volilcev. Ko komisija prešteva glasove, vzame glasovalni listek, ga odpre in v zapisnik zapiše enko, če je bil na listu glas za eniste, in ničlo, če je bil glas za zeriste. Potek preštevanja nam torej opisuje zaporedje $2n-k$ znakov, od katerih je n enk in $n-k$ ničel. Vseh takih zaporedij je

$$\binom{2n-k}{n},$$

kjer je

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Število potekov preštevanja glasov, pri katerih zeristi v nobenem trenutku ne pridejo v vodstvo, označimo z $B_{n,k}$. Verjetnost, da bo predsednik enistov ostal na čelu stranke, je enaka razmerju med številom zanj ugodnih potekov preštevanja glasov in številom vseh potekov preštevanja, torej

$$V = \frac{B_{n,k}}{\binom{2n-k}{n}}.$$

Bolj kot ta verjetnost nas bodo zanimala števila $B_{n,k}$. Imenujejo se *volilna števila*. Ponovimo:

Če na volitvah prva stranka dobi n glasov in druga stranka $n-k$ glasov, nam število $B_{n,k}$ sporoča število možnih preštevanj glasov, pri katerih prva stranka nikoli ne zaostaja za nasprotno. Definicija je smiselna za vsako naravno število n in vsako celo število k z lastnostjo $0 \leq k \leq n$.

Prej smo spoznali, da potek preštevanja lahko ponazorimo z zaporedjem, sestavljenim in n enk in $n-k$ ničel. Katera zaporedja pripadajo tistim preštevanjem volilnih glasov, pri katerih prva stranka nikoli ne zaostaja za drugo? To so zaporedja, pri katerih je levo od vsakega člena vsaj toliko enk kot ničel. To so zaporedja, ki predsedniku enistov zagotavljajo ohranitev položaja. Zato jih bomo imenovali *sprejemljiva* zaporedja.

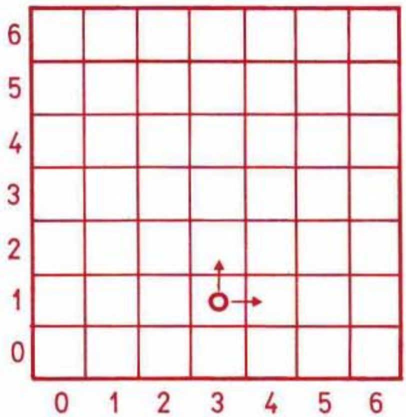
Na podlagi vsega povedanega se boste bralci gotovo strinjali, da je število $B_{n,k}$ enako številu vseh sprejemljivih zaporedij, sestavljenih iz n enk in $n-$ $-k$ ničel. Za primer si oglejmo število $B_{3,1}$. Za tvorbo zaporedij imamo na voljo tri enke in dve ničli. Sprejemljiva zaporedja, ki jih z njimi lahko sestavimo, so naslednja:

$$\begin{array}{c} 1\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,1 \end{array}$$

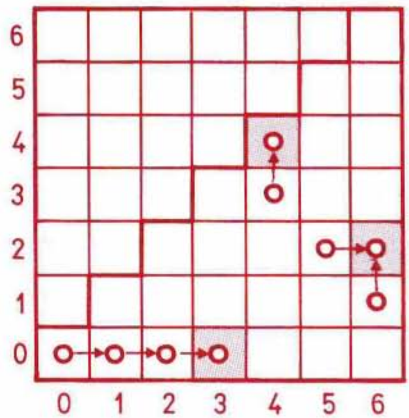
Vidimo: $B_{3,1} = 5$.

Vljudno je, da v preštevanje glasov vključimo tudi kralja. Postavimo ga na šahovsko desko razsežnosti $(n+1)\times(n+1)$. Polja označimo s pari (x, y), kjer števili x in y tečeta med 0 in n, pri čemer x označuje stolpce (od leve proti desni), y pa vrstice (od spodaj navzgor) (slika 1). Začnimo preštevati glasove. Če je na lističu glas za eniste, naj se kralj premakne za eno polje v desno, če pa je glas za zeriste, za eno polje navzgor. Če je kralj potovanje začel na polju $(0,0)$ in je v odvisnosti od glasov delal premike bodisi tipa $(x,y) \rightarrow (x+1,y)$ bodisi tipa $(x,y) \rightarrow (x,y+1)$, bo na koncu pristal na polju $(n, n-k)$. Tako smo spoznali, da nam vsak potek preštevanja glasov (to je vsako zaporedje n enk in $n-k$ ničel) določa neko pot kralja od izhodišča $(0,0)$ do polja $(n, n-k)$. Velja pa tudi obratno: vsaka pot kralja, ki se začne na polju $(0,0)$, krene na vsakem polju bodisi desno bodisi navzgor in se konča na polju $(n, n-k)$, nam določa potek glasovanja (desno = glas za eniste, navzgor = glas za zeriste). Potekom preštevanja glasov, kjer predsednik enistov obdrži položaj, ustrezajo tiste poti šahovskega kralja, ki nikoli ne zaidejo nad diagonalo šahovnice.

Redni bralci Preseka ste se ob tem najbrž že spomnili članka Marka Razpeta o šahovskem kralju z omejeno svobodo gibanja, ki je bil objavljen v Preseku **XV** (1987/88), str. 358-361. Naš kralj je za razliko od tistega še bolj omejen, saj mu korak v smeri diagonale $(x, y) \to (x+1, y+1)$ ni več dovoljen.



Slika 1. Oznake in možne poti kralja.



Slika 2. Pojasnilo k rekurzivnim zvezam (2).

Naj bo $H_{i,j}$ število poti našega omejenega kralja, ki se začnejo na polju $(0, 0)$, končajo na polju (i, j), $i \geq j$ in nikoli ne zaidejo na del šahovnice nad diagonalo. Volilna števila so s števili $H_{i,j}$ v preprosti zvezi:

$$B_{n,k} = H_{n,n-k}. \tag{1}$$

Iz slike 2 razberemo

$$H_{i,0} = 1, \tag{2}$$

$$H_{i,i} = H_{i,i-1} \qquad \text{in} \tag{3}$$

$$H_{i,j} = H_{i-1,j} + H_{i,j-1} \quad (i > j). \tag{4}$$

S pomočjo teh zvez se bomo prepričali, da za naravni števili m in n, $n > 0$, $0 \leq m \leq n$ velja

$$H_{n,m} = \frac{n+1-m}{n+1}\binom{n+m}{n}. \tag{5}$$

Dokažimo to zvezo z indukcijo na $n+m$. Naj bo najprej $n+m=1$. To pomeni $n=1$ in $m=0$. Zveza (5) v tem primeru velja, saj je desna stran enaka 1, leva pa tudi (zaradi (2)).

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev velja za pare naravnih števil n, m, $n > 0$, $0 \leq m \leq n$ z lastnostjo $n+m=k$. Dokažimo, da velja tudi za pare z lastnostjo $n+m=k+1$:

$$\begin{aligned} H_{n,m} &= H_{n-1,m} + H_{n,m-1} = \\ &= \frac{n-m}{n}\binom{n+m-1}{n-1} + \frac{n-m+2}{n+1}\binom{n+m-1}{n} = \\ &= \frac{n-m+1}{n+1}\binom{n+m}{n}. \end{aligned}$$

Pri prvem enačaju smo uporabili enakost (4), pri drugem indukcijsko predpostavko, zadnjo enakost pa preverimo s kratkim računom. S tem je formula (5) dokazana.

Zvezi (1) in (5) pa nam že omogočata izračunati volilna števila:

$$B_{n,k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{2n-k}{n}. \tag{6}$$

Verjetnost, da bo predsednik enistov obdržal svoj položaj je zato enaka

$$V = \frac{B_{n,k}}{\binom{2n-k}{n}} = \frac{k+1}{n+1}.$$

V konkretnem primeru imamo $n = 11079$, $n-k = 6340$, $k = 4739$ in

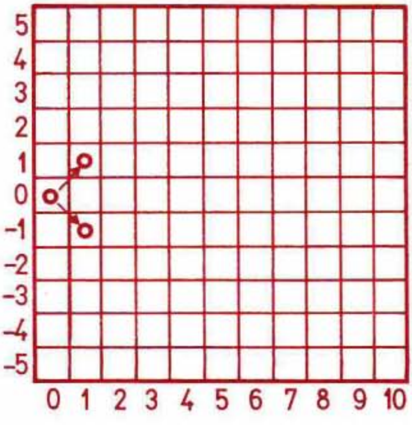
$$V = 4740/11080 = 0.428.$$

Kljub odličnemu volilnemu izidu se je stolček predsedniku krepko zatresel.

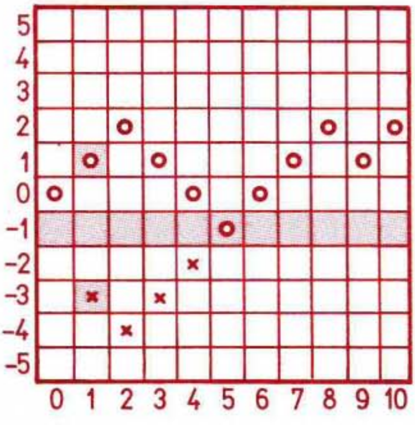
2. Kralj se obnaša drugače, rezultat pa ostaja isti

V tem razdelku bomo spet preštevali glasove, le da bomo kralju na šahovski deski predpisali drugačna pravila obnašanja. Tako bomo (z vašo pomočjo) zvezo (6) dokazali še na drug način.

Vzemimo tokrat šahovsko desko dimenzije vsaj $(2n+1)\times(2n+1)$. Polja spet označimo s pari (x, y), pri čemer označuje x stolpce od leve proti desni $(x = 0, 1, \dots, 2n)$, y pa vrstice od spodaj navzgor $(y = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n)$ (slika 3). Kralja postavimo na polje $(0, 0)$ in začnemo preštevati glasove. Pri vsakem glasu za eniste naj se kralj s svojega polja premakne na polje desno zgoraj (korak $(x, y) \to (x+1, y+1)$), če pa je glas za zeriste, se premakne na polje desno spodaj (korak $(x, y) \to (x+1, y-1)$). Po končanem preštevanju se bo kralj znašel na polju $(2n-k, k)$.



Slika 3. Oznake in možne poti kralja.



Slika 4. Naloga 1.b): Pot (o) in prezrcaljeni del poti (×).

Lepa lastnost takega premikanja kralja je, da nam druga koordinata meri razliko med številom glasov, ki so jih do danega trenutka zbrali enisti, in številom glasov, ki so jih zbrali zeristi. Prva stranka med preštevanjem ne bo nikoli zaostajala za drugo, če kralj na poti ne bo nikoli zašel na polja šahovnice z negativno ordinato.

Na podlagi vsega povedanega lahko sklenemo: število $B_{n,k}$ je enako številu poti šahovskega kralja, ki se začnejo na polju $(0,0)$, končajo na polju $(2n-k,k)$, na vsakem polju vodijo bodisi desno navzgor bodisi desno navzdol in nikoli ne zaidejo na polja z negativnimi ordinatami.

Upam, da boste število teh poti s pomočjo naslednjih navodil uspeli izračunati sami.

Naloga za bralce:

(a) Koliko je vseh poti šahovskega kralja, ki začnejo na polju $(1,1)$, končajo na polju $(2n-k,k)$ in na vsakem polju vodijo bodisi na polje desno zgoraj bodisi desno spodaj?

(b) Naj bo P ena od poti iz točke (a), ki na polju $(s,-1)$ prvič zaide na spodnji del šahovnice (kjer so polja z negativnimi ordinatami). Če del poti P med poljem $(1,1)$ in poljem $(s,-1)$ prezrcalimo preko vrstice $y=-1$, dobimo pot z začetkom na polju $(1,-3)$ (slika 4). Premislite, da je vseh poti z začetkom na polju $(1,1)$ in koncem na polju $(2n-k,k)$, ki zaidejo na spodnji del šahovske deske, natanko toliko, kot je vseh poti z začetkom na polju $(1,-3)$ in koncem na $(2n-k,k)$. Koliko je torej teh poti?

(c) Upoštevajte, da se mora kralj, če noče na spodnjo polovico šahovnice, v prvi potezi premakniti na polje $(1,1)$ in s pomočjo točk (a) in (b) izpeljite (6).

3. Kraljevi dosje o volilnih številih

Iz trezorja kraljeve obveščevalne službe sem uspel dobiti spisek začetnih volilnih števil. Seveda ga z veseljem objavljam:

k/n	1	2	3	4	5	6	7	8
8								1
7							1	8
6						1	7	35
5					1	6	27	110
4				1	5	20	75	275
3			1	4	14	48	165	572
2		1	3	9	28	90	297	1001
1	1	2	5	14	42	132	429	1430
0	1	2	5	14	42	132	429	1430

Poleg vlamljanja v kraljeve trezorje lahko do tega spiska pridete še najmanj na dva načina. Prvi je neposredni izračun s pomočjo zveze (6). Pri drugem načinu pa se opremo na rekurzivne zveze, ki jih dobimo, če upoštevamo (1) in (2 - 4):

$$B_{n,n} = 1, \tag{7}$$

$$B_{n,0} = B_{n,1} \qquad \text{in} \tag{8}$$

$$B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + B_{n,k+1} \quad (n > k > 0). \tag{9}$$

Drugi način je ugodnejši, saj lahko z njim tabelo sestavite hitro in na pamet. Najprej na diagonalo zapišete enke (enakost (7)), nato upoštevate zvezo (8) in dobite prvo število v vrstici $k = 0$. To vam, skupaj z (9), omogoča računanje števil na prvi poddiagonali (glej puščice). Podobno postopamo pri računanju druge in vseh nadaljnjih poddiagonal.

Naj ob koncu bralce opozorim na spodnjo vrstico seznama volilnih števil:

$$1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ \ldots$$

To so tako imenovana *Catalanova števila*:

$$C_n = B_{n,0} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Bralci Preseka ste jih že srečali, in sicer v članku Romana Drnovška o Eulerjevem problemu delitve konveksnega večkotnika na trikotnike, ki je izšel v zadnji številki lanskega letnika Preseka. Števili c_n in e_n iz tega članka sta namreč s Catalanovimi števili v preprosti zvezi: $c_n = C_{n-1}$, $e_n = C_{n-2}$. To najhitreje dokažemo takole:

$$e_n = \frac{1}{2n-3}\binom{2n-3}{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} = C_{n-2} \qquad n = 3, 4, \ldots$$

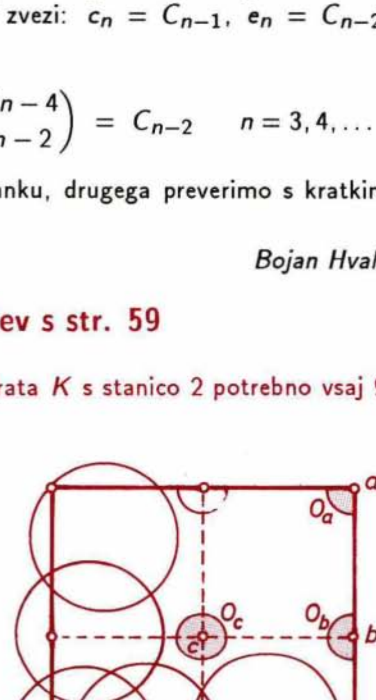
Prvi enačaj je dokazan v omenjenem članku, drugega preverimo s kratkim računom, tretji pa sledi iz (10).

Bojan Hvala

KVADRAT POD KROGI – Rešitev s str. 59

Najprej dokažimo, da je za pokritje kvadrata K s stanico 2 potrebno vsaj 9 krogov premera 1.

Oglišča kvadrata, razpolovišča njegovih stranic in središče kvadrata zberimo v množico $\mathcal{M}$, pokritje $\mathcal{P}$ kvadrata K pa naj sestavlja p krogov. Razdelimo $\mathcal{P}$ na dve skupini, $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{P}_2$. V $\mathcal{P}_1$ naj bodo krogi, ki vsebujejo največ eno točko iz $\mathcal{M}$, v $\mathcal{P}_2$ pa krogi, ki vsebujejo po dve točki iz $\mathcal{M}$. Naj bo v prvi skupini p_1, v drugi pa p_2 krogov in tedaj $p_1 + p_2 = p$. Zaznamujmo z $\mathcal{M}_1$ množico vseh točk iz $\mathcal{M}$, ki jih vsebujejo krogi iz $\mathcal{P}_1$. Če



Slika 1. Družina $\mathcal{P}_1$ in okolica $\mathcal{O}_x$, $x \in \mathcal{M}_2$.