PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 1
Strani 40–45

Vilko Domajnko:

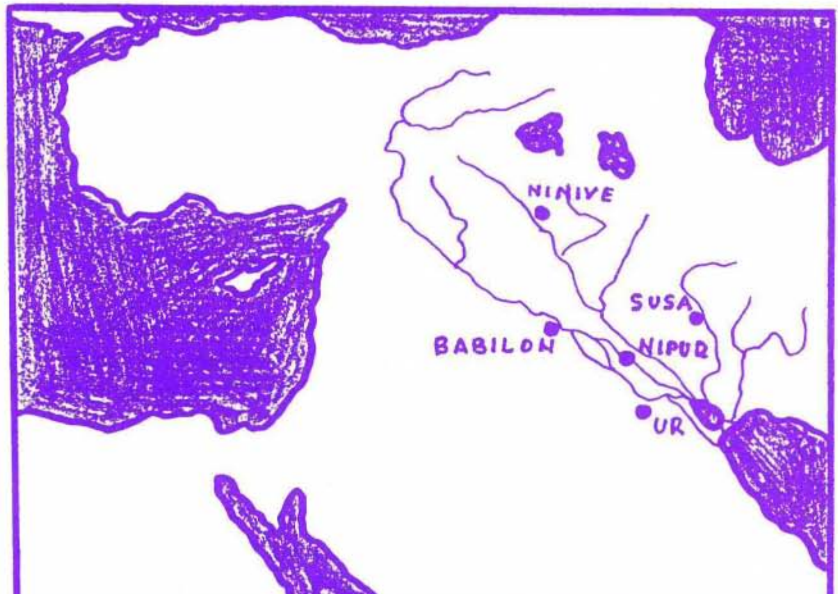
BABILONSKI PRIBLIŽEK ZA $\sqrt{2}$

Ključne besede: matematika.

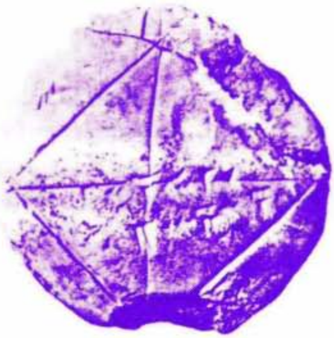
Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1160-Domajnko.pdf

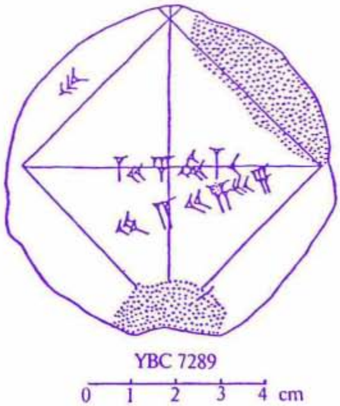
BABILONSKI PRIBLIŽEK ZA $\sqrt{2}$

V Mezopotamiji, torej v široki dolini rek Eufrat in Tigris, je v davnini oziroma v obdobju od približno 5000 pr.n.št. do približno 500 pr.n.št. živelo večje število različnih ljudstev z visoko razvitimi kulturami. Omenimo med njimi vsaj Sumerce, Akadce, Asirce in Babilonce. Izkopane glinene ploščice s klinopisi, ki so v času svojega nastanka služile za zapisovanje različnih tekstov, so danes eden najpomembnejših virov pri proučevanju teh kultur. Največ takih ploščic so arheologi izkopali ob koncu prejšnjega in v začetku tega stoletja. Našli so jih predvsem na območju nekdanjih velikih mest, kot so Babilon, Ur, Nipur, ... Samo v Nipurju so tako izkopali okrog 50000 glinenih ploščic s klinopisi. Te ploščice so danes shranjene v več različnih muzejih širom sveta.



V eni izmed teh klinopisnih zbirk, imenovani **Yale Babylonian Collection**, ki jo hranijo v mestu New Haven v ZDA, najdemo pod zaporedno številko 7289 tudi glineno ploščico (poslej jo bomo označevali kar z YBC 7289). Po vsej verjetnosti je nastala v obdobju prve Hamurabijeve dinastije, torej v letih med 1800 in 1500 pr.n.št. Prikazuje kvadrat z včrtanima obema diagonalama.





Poleg stranice kvadrata je zapisano število *30*, ob diagonali pa lahko preberemo še števili *1;24,51,10* in *42;25,35*. Števila so seveda zapisana v šestdesetiškem sistemu, ki je bil takrat v rabi. Več o teh zapisih bo bralec našel v delih (1) in (2) iz seznama literature na koncu članka. Na tem mestu povejmo le to, da vejica v zapisu ločuje med seboj posamezne števke, podpičju pa je dodeljena vloga, ki smo je sicer navajeni pri običajni vejici v današnjem decimalnem zapisu - loči torej celi del števila od njegovega preostanka. Tako je torej:

$$\begin{aligned} \mathit{30} &= 30 \\ \mathit{1;24,51,10} &= 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1,41421296\ldots \\ \mathit{42;25,35} &= 42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}=42,42638889\ldots \end{aligned}$$

Zveza med temi tremi števili je preprosta in se nam razkrije, brž ko jih pomnožimo med seboj. Tretje med števili je namreč produkt prvih dveh. S tem pa se nam že odpre pot k razvozlanju pomena zapisanih števil na YBC 7289. Predstavljajo namreč zvezo med diagonalo in stranico kvadrata

$$d = a \cdot \sqrt{2}.$$

V nadaljevanju nas bo zanimala predvsem vednost babilonskih matematikov o številu $\sqrt{2}$. Ploščica YBC 7289 namreč priča, da so Babilonci poznali za to število naravnost izvrsten racionalni približek, ki se s pravo vrednostjo $\sqrt{2}$

ujema kar na prvih petih decimalnih mestih za vejico. Poglejmo:

$$\begin{aligned} \mathit{1;24,51,10} &= 1,41421296\ldots, \\ \sqrt{2} &= 1,41421356\ldots \end{aligned}$$

Kot dodatno zanimivost omenimo, da je bil ta babilonski približek za $\sqrt{2}$ tako dober, da so ga mnogo kasneje uporabljali celo starogrški matematiki. Srečamo ga v delih Arhimeda, Herona in Ptolemeja. Slednji ga je uporabil pri računanju vrednosti kotnih funkcij v svojih astronomskih tabelah. Vendar pa stari Grki približka niso prevzeli od Babiloncev, pač pa so prišli do njega po povsem samostojni poti.

Poleg ploščice YBC 7289 obstaja še precej drugih glinenih ploščic, na katerih lahko preberemo različne babilonske racionalne približke za $\sqrt{2}$. Toda vsi ti se po svoji natančnosti še daleč ne morejo meriti s približkom na YBC 7289. Tako je recimo znano, da so Babilonci v večini primerov uporabili kot približek za $\sqrt{2}$ kar število *1;25*.

Poglejmo še, na kak način so babilonski matematiki sploh prišli do tako natančnega racionalnega približka za $\sqrt{2}$. Zdi se, da sta pri tem na voljo dva različna odgovora:

Nekatere racionalne približke za korene so računali po formuli

$$\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a},$$

ki daje dokaj dobre približke v primerih, ko je $|h| < a^2$. Tako dobimo za $a = \frac{4}{3}$ in $h = \frac{2}{9}$ že znani približek

$$\sqrt{2} \approx \mathit{1;25}.$$

Za $a = \frac{3}{2}$ in $h = \frac{3}{4}$ dobimo prav tako pogosto uporabljeni babilonski približek

$$\sqrt{3} \approx \mathit{1;45}\,.$$

Tako izredno natančen približek za $\sqrt{2}$, kot ga poznamo s ploščice YBC 7289, pa je s pomočjo zgornjega obrazca nekoliko težje dosegljiv. Danes je sicer znano, da je ta približni obrazec pravzaprav le začetni del vrste, ki jo dobimo, če koren $\sqrt{a^2+h}$ razvijemo po binomskem obrazcu

$$\sqrt{a^2+h} = a + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{8a^3} + \frac{h^3}{16a^5} - \frac{5h^4}{128a^7} + \ldots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot 2^n} \cdot \frac{h^n}{a^{2n-1}} + \cdots$$

Znano je tudi, da lahko v primeru, ko je $|h| < a^2$, pridemo do zelo natančnih približkov kar s seštevkom zadostnega števila začetnih členov v tej vsoti. Toda - ne smemo pozabiti, da je vse to znano **danes**, oziroma kvečjemu šele nekaj stoletij. Prav nobenega podatka pa ni o tem, da bi bil tak razvoj poznan tudi Babiloncem pred več kakor tremi tisočletji. Zato se zdi nekoliko dvomljivo, da bi Babilonci po tej poti prišli do svojega natančnega približka za $\sqrt{2}$.

Otto Neugebauer, ki velja za enega najboljših poznavalcev matematike Babiloncev, ponuja še drugačno razlago za nastanek tega približka. Poglejmo:

Recimo, da so vzeli Babilonci

$$x_0 = \mathit{1;\ 30} = 1\frac{1}{2}$$

za začetni približek za $\sqrt{2}$. Ni jim bilo težko ugotoviti (s kvadriranjem), da je ta približek prevelik, medtem ko je število *1; 20* $= 1\frac{1}{3}$, ki ga dobimo pri deljenju števila 2 z *1; 30*, premajhno kot približek za $\sqrt{2}$. Prava vrednost $\sqrt{2}$ leži torej med obema številoma. Najenostavneje jo je poiskati kar z njuno aritmetično sredino. Tako bi, recimo, Babilonci dobili nov približek

$$x_1 = \mathit{1;\ 25} = 1\frac{5}{12}.$$

Bralec bo najbrž opazil, da smo ga v tem spisu že omenili. V primeru, da se babilonskim matematikom ta približek ni zdel dovolj natančen, so lahko poiskali boljšega kar z nadaljevanjem že začetega postopka. Ker je *1; 25* prevelik približek za $\sqrt{2}$, približek *1;24,42,21*, ki je spet rezultat deljenja števila 2 z *1;25*, pa premajhen, so vzeli za nov približek znova kar aritmetično sredino obeh števil. Tako so dobili

$$x_2 = \mathit{1;24,51,10},$$

torej znameniti približek s ploščice YBC 7289.

Velika večina zgodovinarjev matematike se danes s to, sicer le hipotetično Neugebauerjevo razlago povsem strinja. Neugebauer sam o njej pravi: "Prav nobenega dokaza ni, da Babilonci ne bi računali približka po tej poti."

Z opisanim postopkom bi babilonski matematiki lahko še nadaljevali in na tak način prihajali do venomer natančnejših približkov za $\sqrt{2}$. Vendar pa jim je izračunani približek za njihove namene najbrž že povsem zadoščal.

Metoda, ki smo jo pravkar opisali, je v uporabi še danes. Velja za izredno preprosto, a obenem prav toliko učinkovito iterativno metodo za računanje racionalnih približkov števila $\sqrt{a}$ ($a \in \mathbb{R}^+$). V kratkem jo lahko takole opišemo:

Naj bo $x_o > 0$ poljubno izbran začetni racionalni približek za $\sqrt{a}$ in

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Zaporedje približkov $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se potem steka k številu $\sqrt{a}$.

Naloge

1) Zapiši racionalni približek na ploščici YBC 7289 v obliki ulomka.

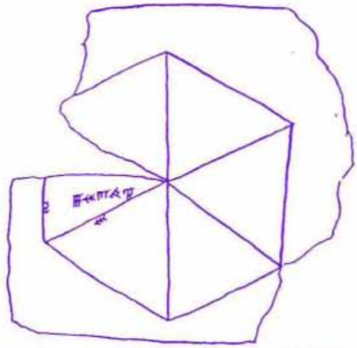
2) Za računanje približka za $\sqrt{2}$ po formuli $\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}$ vzemi $a = \frac{3}{2}$. Zatem poišči najprej ustrezno vrednost za h, nato pa še približek.

3) Za računanje približka za $\sqrt{2}$ po formuli $\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}$ vzemi $a = \frac{17}{12}$ in $h = -\frac{1}{144}$. Pokaži, da se tako izračunani približek v šestdesetiškem sistemu ujema na prvih dveh "decimalnih mestih" s približkom na ploščici YBC 7289.

4) Za računanje približka $\sqrt{2}$ s pomočjo razvoja izraza $\sqrt{a^2 + h}$ vzemi $a = \frac{4}{3}$ in $h = \frac{2}{9}$. Izračunaj štiri zaporedne približke v šestdesetiškem sistemu, če jemlješ zapored po dva, tri, štiri oziroma pet začetnih členov te vrste.

5) Za računanje približka za $\sqrt{2}$ uporabi iterativno metodo. Izračunaj četrti približek x_3, če vzameš za začetni približek $x_0 = \frac{3}{2}$. Primerjaj njegovo natančnost glede na pravo vrednost $\sqrt{2}$. Zapiši približek x_3 tudi v šestdesetiškem sistemu in ga primerjaj s približkom na ploščici YBC 7289.

6) Na neki glineni ploščici, nastali v obdobju Babiloncev, je prikazan pravilni šestkotnik s stranico dolžine *0;30* in s ploščino *0;6,33,45* enega izmed enakostraničnih trikotnikov. Poišči s pomočjo teh dveh podatkov približek za $\sqrt{3}$, ki so ga v tem primeru uporabili babilonski matematiki.



Dodatno branje:

(1) Devide V., Matematika skozi kulture in epohe, Ljubljana, DMFA SRS, 1984
(2) Hogben L., Matematika v nastajanju, Ljubljana, Mladinska knjiga, 1976
(3) Legiša P., Matematika 2, prvi zvezek, Ljubljana, DZS, 1985
(4) Struik D.J., Kratka zgodovina matematike, Ljubljana, DMFA SRS, 1977.

Vilko Domajnko

37. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Pri *Komisiji za popularizacijo matematike v srednji šoli* smo izbrali 164 učencev, ki so se 22. maja zbrali v Kopru. Koprska podružnica *DMFA Slovenije* je poskrbela za prijetno bivanje ob slovenski obali. Učence je sicer najprej čakal spopad z nalogami v prostorih *Gimnazije Koper*, nato pa so se zapeljali z ladjo in sprehodili ob morju.

Državna tekmovalna komisija je po pregledu izdelkov najboljšim podelila priznanja. Dobili so jih:

PRVI LETNIK:

3. nagrada: Andrej Zorko, Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice, Sanja Fidler, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Pohvala: Sašo Živanovič, STŠ – Gimnazija Lava, Celje; Matjaž Košak, Gimnazija Novo mesto; Miha Vuk, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Igor Klep in Jernej Tonejc, SŠC Ptuj; Blaž Vehar, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Polona Grešak, Gimnazija Trbovlje; Klemen Ivanec in Saša Mlakar, Gimnazija Kočevje.

DRUGI LETNIK:

3. nagrada: Blaž Mavčič, Gimnazija Kranj, Marko Žnidarič, II. gimnazija Maribor

Pohvala: Andrej Studen in Manc Cirk, Gimnazija Kranj; Dejan Velušček, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jernej Barbič, Gimnazija Tolmin; Nataša Hočevar, Gimnazija Velenje;