

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 20 (1992/1993)

Številka 6

Strani 346-350

Roman Drnovšek:

EULERJEV PROBLEM DELITVE KONVEKSNEGA VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

Ključne besede: matematika, geometrija, konveksni večkotniki, Eulerjev problem.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/20/1151-Drnovsek.pdf>

© 1993 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

EULERJEV PROBLEM DELITVE KONVEKSNEGA VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

V tem prispevku bomo odgovorili na naslednji vprašanji:

1. Na koliko različnih načinov lahko dani konveksni n -kotnik s pomočjo njegovih diagonal razdelimo na same trikotnike tako, da se začrtane diagonale v notranjosti večkotnika ne sekajo?

2. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev tako, da zmnožimo vedno po dva faktorja in je tako dobljeni produkt eden od faktorjev v nadaljnjem množenju?

Prvo vprašanje je leta 1751 postavil švicarski matematik Leonhard Euler (1707 - 1783), z drugim pa se je leta 1838 prvi ukvarjal francoski matematik Catalan. Čeprav se problema na prvi pogled precej razlikujeta, pa je njuno reševanje tesno povezano.

Eulerjev problem bralcem, ki skrbno shranjujejo vse številke Preseka, ni neznan. V članku Marka Razpeta: Rezanje večkotnika na trikotnike (P 18 (1990/91), št. 1, str. 12 - 16) avtor (med drugim) bralca seznanja z rešitvijo in le to tudi delno dokaže. Hkrati je v isti številki Preseka Vilko Domajnko na str. 35 zastavil Eulerjevo nalogo za naravna števila $n \leq 8$.

V Eulerjevo čast z e_n označimo število možnih delitev konveksnega n -kotnika na trikotnike. Za prvih nekaj naravnih števil lahko preprosto preštejemo vse možnosti. Tako ugotovimo, da je

$$e_3 = 1, \quad e_4 = 2, \quad e_5 = 5 \quad \text{in} \quad e_6 = 14,$$

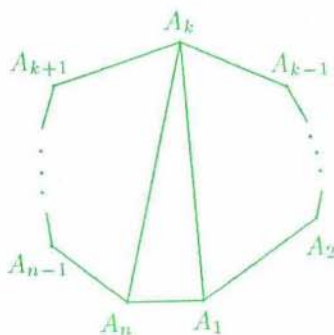
ter slej kot prej obupamo nad to metodo določanja števil e_n .

Leta 1758 je Segner, s katerim se je Euler dopisoval, našel naslednjo rekurzivno zvezo za zaporedje števil $\{e_n\}$:

$$e_n = e_2 e_{n-1} + e_3 e_{n-2} + e_4 e_{n-3} + \dots + e_{n-1} e_2, \quad n \geq 3, \quad (1)$$

kjer smo definirali $e_2 = 1$. Dokažimo to zvezo! V ta namen si oglejmo sliko 1.

Oglišča konveksnega n -kotnika označimo zaporedoma s črkami $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Pri poljubni delitvi je stranica $A_n A_1$ stranica nekega trikotnika, denimo $A_n A_1 A_k$, kjer je k naravno število med 2 in $(n-1)$. Na eni strani tega trikotnika imamo k -kotnik $A_1 A_2 \dots A_k$, na drugi stani pa $(n+1-k)$ -kotnik $A_k A_{k+1} \dots A_n$. Prvi večkotnik lahko razdelimo z diagonalami na trikotnike na e_k , drugega pa na e_{n+1-k} načinov. Ker pa poljubno



Slika 1

delitev prvega večkotnika lahko kombiniramo s poljubno delitvijo drugega, imamo pri izbranem k natanko $e_k \cdot e_{n+1-k}$ delitev. Število k lahko zavzame poljubno naravno vrednost med 2 in $(n-1)$. Ker na ta način dobimo vse možne delitve prvotnega večkotnika, od tod dobimo (1). (Bralec naj sam premisli, zakaj je ugodno definirati $e_2 = 1$.)

Zvezo (1) imenujemo *Segnerjeva rekurzivna formula*. Lahko se prepričamo, da se sklada s prej določenimi vrednostmi e_3, e_4, e_5 in e_6 . Dobimo pa še nekaj naslednjih členov zaporedja :

$$e_7 = e_2 e_6 + e_3 e_5 + e_4 e_4 + e_5 e_3 + e_6 e_2 = 42 ,$$

$$e_8 = e_2 e_7 + e_3 e_6 + e_4 e_5 + e_5 e_4 + e_6 e_3 + e_7 e_2 = 132 \text{ itd.}$$

Pri velikih n tudi s pomočjo formule (1) težko določimo število e_n . Da bi dobili končno formulo za e_n , najprej rešimo drugi problem.

Začnimo z nekaj primeri: Produkt števil $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ lahko izračunamo na primer na naslednji način: $2 \cdot 3 = 6$, $4 \cdot 5 = 20$ in končno $6 \cdot 20 = 120$. Splošno lahko produkt štirih faktorjev $a b c d$ izračunamo na naslednjih pet načinov:

$$[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d , [a \cdot (b \cdot c)] \cdot d , (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) ,$$

$$a \cdot [(b \cdot c) \cdot d] \text{ in } a \cdot [b \cdot (c \cdot d)] .$$

Tu smo upoštevali vrstni red faktorjev. Kaj pa, če le ta ni predpisan? Tedaj lahko na primer množimo tudi takole

$$a \cdot [c \cdot (b \cdot d)] \text{ ali } d \cdot [(c \cdot b) \cdot a] .$$

Ugotovili smo, da Catalanov problem pravzaprav vsebuje dve vprašanji:

1. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev, če je vrstni red faktorjev predpisan ?
2. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev, če vrstni red faktorjev ni predpisan ?

Števili, po katerih sprašujeta vprašanji, zaporedoma zaznamujmo s c_n in z r_n . Obe števili sta v preprosti zvezi

$$r_n = c_n \cdot n! , \quad (2)$$

kjer je $n!$ produkt prvih n naravnih števil. To bo brez težav, ob upoštevanju, da je število vseh možnih razvrstitev (permutacij) n elementov enako $n!$, pokazal bralec sam. Kot za zaporedje števil $\{e_n\}$ bomo tudi za zaporedji $\{c_n\}$ in $\{r_n\}$ poiskali rekurzivni zvezi, s pomočjo katerih bomo dobili formule za vsa tri zaporedja.

Najprej začnimo z zaporedjem $\{r_n\}$. Predstavljajmo si, da imamo zapisanih vseh r_n načinov množenja faktorjev f_1, f_2, \dots, f_n . Tem poskusimo dodati še faktor f_{n+1} (ki ga označimo krajše s f), tako da dobimo vseh r_{n+1} načinov množenja faktorjev $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$.

Naj bo P poljubno množenje produkta n faktorjev (eno izmed r_n možnih). Očitno vsebuje $(n-1)$ produktov oblike $A \cdot B$, kjer sta A in B podprodukta. Če je na primer $n=4$ in $P = c \cdot [(a \cdot b) \cdot d]$, imamo za A in B naslednje možnosti :

$$A = a, B = b ; A = a \cdot b, B = d \text{ in } A = c, B = (a \cdot b) \cdot d .$$

Če uporabimo faktor f najprej enkrat kot faktor pred A , potem za A , nadalje enkrat kot faktor pred B in nato za B , dobimo iz produkta $A \cdot B$ naslednje štiri produkte

$$(f \cdot A) \cdot B, (A \cdot f) \cdot B, A \cdot (f \cdot B) \text{ in } A \cdot (B \cdot f) .$$

Ker to lahko storimo za vseh $(n-1)$ podproduktov $A \cdot B$ v P , iz produkta P tako dobimo $4(n-1)$ produktov $(n+1)$ faktorjev. Poleg tega iz P dobimo tudi naslednji dve mogoči množenji $f \cdot P$ in $P \cdot f$. Torej iz enega množenja produkta n faktorjev dobimo $(4n-2)$ različnih množenj produkta $(n+1)$ faktorjev. Iz vseh r_n različnih množenj produkta n faktorjev potemtakem dobimo $(4n-2)r_n$ različnih množenj produkta $(n+1)$ faktorjev. Ugotovili

smo torej, da je

$$r_{n+1} = (4n - 2) r_n . \quad (3)$$

To je rekurzivna zveza med r_n in r_{n+1} . Da dobimo končno formulo za r_n , izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja. Očitno je $r_2 = 2$, saj faktorja a in b lahko množimo na dva možna načina: $a \cdot b$ ali $b \cdot a$. Iz (3) potem dobimo zaporedoma $r_3 = 6$, $r_2 = 2 \cdot 6$, $r_4 = 10$, $r_3 = 2 \cdot 6 \cdot 10$ in tako naprej. Končno dobimo

$$r_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n - 6) .$$

Poiščimo še rekurzivno zvezo za zaporedje $\{c_n\}$. Sedaj je vrstni red faktorjev predpisan, denimo, da je to že zaporedje f_1, f_2, \dots, f_n ($n \geq 2$). Vsako od c_n množenj teh faktorjev je oblike $(\quad) \cdot (\quad)$, kjer prvi oklepaj vsebuje množenje prvih recimo k faktorjev f_1, f_2, \dots, f_k , drugi pa naslednjih $(n - k)$ faktorjev $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n$. Tukaj je k poljubno naravno število, manjše od n . V prvem oklepaju je možnih c_k množenj, v drugem pa c_{n-k} . Ker lahko množenja v prvem oklepaju poljubno kombiniramo z množenji v drugem oklepaju, je pri danem k vseh množenj $c_k c_{n-k}$. Ker je k poljubno naravno število od 1 do $(n - 1)$, končno dobimo

$$c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + c_3 c_{n-3} + \dots + c_{n-1} c_1 . \quad (4)$$

Z uporabo te rekurzivne zveze iz $c_1 = 1$ in $c_2 = 1$ izpeljemo

$$c_3 = c_1 c_2 + c_2 c_1 = 2 , \quad c_4 = c_1 c_3 + c_2 c_2 + c_3 c_1 = 5 \quad \text{itd.}$$

S pomočjo enakosti (2) dobimo tudi končno formulo za c_n :

$$c_n = \frac{r_n}{n!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n - 6)}{n!} .$$

Tako je Catalanov problem v celoti rešen. Končno rešitev Eulerjevega problema pa tudi že slutimo. Prvih nekaj členov zaporedij $\{e_n\}$ in $\{c_n\}$ se z zamikom enega člana namreč ujema, zaporedji pa zadoščata podobnima rekurzivnima enačbama. Zato postavimo hipotezo

$$e_n = c_{n-1} ,$$

ki jo bralec s pomočjo indukcije ter zvez (1) in (4) brez težav tudi dokaže.

