PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 5
Strani 268–272

Borut Zalar:

PRAVOKOTNE ENAČBE NA RACIONALNI ŠTEVILSKI MREŽI

Ključne besede: matematika, enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1146-Zalar.pdf

PRAVOKOTNE ENAČBE NA RACIONALNI ŠTEVILSKI MREŽI

1. Racionalna številska mreža in pravokotnost

Naj bo v ravnini podan pravokotni koordinatni sistem (x, y) in naj bo M množica vseh točk, ki imajo obe koordinati racionalni. Množico M bomo imenovali racionalna številska mreža.

Vsaki točki te mreže pripada torej par racionalnih števil (n, m), koordinati točke v danem koordinatnem sistemu. Vsaki točki mreže priredimo daljico, ki povezuje to točko z izhodiščem koordinatnega sistema, torej s točko $(0, 0)$. V mreži definiramo seštevanje in pravokotnost.

- Seštevanje definiramo takole: Če je $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$, je $A + B = (n + k, m + l)$. Na primer $(1, 2) + (3, -1) = (4, 1)$.
- Za točki $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$ rečemo, da sta pravokotni, če sta pravokotni daljici OA in OB.

Če si narišemo trikotnik OAB in vzporednice s koordinatnima osema skozi točki A in B, vidimo, da iz Pitagorovega izreka sledi, da je $\overline{OA}^2 = n^2 + m^2$, $\overline{OB}^2 = k^2 + l^2$ ter $\overline{AB}^2 = (n - k)^2 + (m - l)^2$. Če naj bo trikotnik OAB pravokoten, mora tudi zanj veljati Pitagorov izrek, oziroma $n^2 + m^2 + k^2 + l^2 = (n - k)^2 + (m - l)^2$. Od tod sledi $nk + ml = 0$. To nam da možnost definicije pravokotnosti, ki je popolnoma algebrajska in enostavno računsko preverljiva: $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$ sta pravokotni, če je $nk + ml = 0$. Tako na primer točki $A = (1, 2)$ in $B = (3, -2)$ nista pravokotni, saj je $1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = -1 \neq 0$, medtem ko sta točki $C = (1, 2)$ in $D = (2, -1)$ pravokotni, ker je $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$.

2. Dve enačbi z racionalnimi števili

Oglejmo si sedaj rešitvi dveh funkcijskih enačb, ki ju bomo potrebovali v nadaljevanju. Naj bo $\mathbb{Q}$ množica racionalnih števil in $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ neka funkcija. Potem veljata naslednji trditvi:

Trditev 1. *Če je $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za vsaka x in y, potem obstaja tako racionalno število a, da je $f(x) = ax$.*

Dokaz. Iz $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ sledi najprej $f(0) = 0$. Naj bo nadalje $a = f(1)$. Ker je $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, je seveda $a \in \mathbb{Q}$. Tedaj je $f(2) = f(1+ + 1) = f(1) + f(1) = 2a$ in $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3a$. Naprej sklepamo podobno, saj iz $f(n) = na$ sledi $f(n+1) = f(n) + f(1) = na + + a = (n+1)a$. Tisti z nekaj več znanja ste nedvomno prepoznali prijem, ki se imenuje princip popolne indukcije. Po njem sledi, da je $f(x) = ax$ za vsako naravno število x. Če pa je x negativno celo število, potem je $0 = = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + (-ax)$, saj je $-x$ naravno število. To nam pove, da je $f(x) = ax$ za vsa cela števila x.

Naj bo zdaj x naravno število. Ker je $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, dobimo po prejšnjem odstavku $a = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = xf(\frac{1}{x})$, oziroma $f(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x}$. Ker je $f(\frac{1}{x} + + \frac{1}{-x}) = 0$, je $f(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x}$ tudi za negativna cela števila x. Na koncu vzemimo še poljubno racionalno število $x = \frac{n}{m}$. Vzamemo lahko, da je n naravno, m pa celo število. Tedaj je $f(x) = f(\frac{n}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = \frac{na}{m} = ax$ in dokaz je s tem končan.

Trditev 2. *Če je $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$, potem obstaja tako racionalno število a, da je $f(x) = ax^2$.*

Dokaz. Ponovno definirajmo $f(1) = a$. Najprej je $f(0) + f(0) = 2f(0) + + 2f(0)$, kar pomeni, da je $f(0) = 0 = a \cdot 0^2$. Nadalje je $f(2) = f(1+1) = = f(1+1) + f(1-1) = 2f(1) + 2f(1) = 4a = a \cdot 2^2$ in $f(3) = f(2+1) = = 2f(2) + 2f(1) - f(2-1) = 9a = a \cdot 3^2$. Nadaljujmo! Iz $f(n-1) = a(n-1)^2$ in $f(n) = an^2$ sledi

$$f(n+1) = 2f(n) + 2f(1) - f(n-1) = 2an^2 + 2a - a(n-1)^2 = a(n+1)^2$$

in po principu popolne indukcije je $f(x) = ax^2$ za vsako naravno število x. Če je x negativno celo število, potem iz

$$f(x + (-x)) + f(x - (-x)) = 2f(x) + 2f(-x)$$

in

$$f(x + (-x)) + f(x - (-x)) = f(2x) = f(x+x) + f(x-x) = 4f(x)$$

dobimo, da je $f(-x) = f(x) = ax^2$.

Za ulomke postopamo podobno kot v dokazu prejšnje trditve.

3. Primer pravokotne enačbe

Naj bo M racionalna številska mreža. Pravokotna enačba na tej mreži je taka enačba z dvema spremenljivkama A in B, ki jo rešujemo pri dodatnem pogoju, da sta A in B pravokotni točki v mreži. Oglejmo si preprost primer take enačbe.

Naloga. *Poišči vse take funkcije $f : M \to \mathbb{Q}$, za katere velja $f(A+B) = f(A) + f(B)$, če sta A in B pravokotna.*

Trditev 3. *Naj bo $A = (x, y)$ poljubna točka mreže. Izberimo si tri ulomke a, b in c. Definirajmo funkcijo $f : M \to \mathbb{Q}$ s predpisom $f(A) = ax + by + c(x^2 + y^2)$. Tedaj je f ena od rešitev naše naloge.*

Dokaz. Naj bosta $A = (n, m)$ in $B = (k, l)$ pravokotni točki mreže. Iz prvega razdelka sledi, da je $nk + ml = 0$. Tedaj je

$$f(A+B) - f(A) - f(B) = a(n+k) + b(m+l) + c((n+k)^2 + (m+l)^2) - \\ -an - bm - c(n^2 + m^2) - ak - bl - c(k^2 + l^2) = 2c(nk + ml) = 0$$

in dokaz je končan.

Zdaj se seveda zastavi vprašanje, ali so to vse možne rešitve naše naloge. Dokazali bomo, da je odgovor pritrdilen. Najprej bomo ločeno opazovali sode in lihe rešitve. (Funkcija f se imenuje soda, če je $f(-A) = f(A)$, in liha, če je $f(-A) = -f(A)$. Tako je na primer $f(A) = ax + by$ liha, $f(A) = c(x^2 + y^2)$ pa soda. Funkcija $h(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ pa ni niti soda niti liha.)

Trditev 4. *Naj bo $f : M \to \mathbb{Q}$ liha rešitev naše naloge. Tedaj je $f(x, y) = ax + by$ za neka $a, b \in \mathbb{Q}$.*

Dokaz. Vzemimo dve poljubni racionalni števili x, y. Točki (x, x) in $(y, -y)$ sta pravokotni, prav tako točki $(x + y, 0)$ in $(0, x - y)$. Ker je f rešitev naše naloge, je

$$f(x + y, x - y) = f(x + y, 0) + f(0, x - y) = f(x, x) + f(y, -y).$$

Če zamenjamo x in y, dobimo

$$f(x+y,0)+f(0,-(x-y))=f(y,y)+f(x,-x).$$

Ker sta $(x,0)$ in $(0,x)$ ter $(y,0)$ in $(0,y)$ para pravokotnih točk, velja $f(x,x)=f(x,0)+f(0,x)$ in $f(y,-y)=f(y,0)+f(0,-y)$. Zaradi lihosti funkcije f sledi iz dosedanjega:

$$f(x+y,0)+f(0,x-y)=f(x,0)+f(0,x)+f(y,0)-f(0,y),$$

$$f(x+y,0)-f(0,x-y)=f(y,0)+f(0,y)+f(x,0)-f(0,x).$$

Če obe enakosti seštejemo in delimo z 2, dobimo $f(x+y,0)=f(x,0)+$ $+f(y,0)$. Podobno dobimo tudi $f(0,x+y)=f(0,x)+f(0,y)$. Po trditvi 1 je $f(x,0)=ax$ in $f(0,x)=bx$ za neka $a,b\in\mathbb{Q}$. Ker sta za poljubno točko (x,y) mreže točki $(x,0)$ in $(0,y)$ pravokotni, takoj sledi

$$f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)=ax+by$$

in s tem je dokaz končan.

Trditev 5. *Naj bo f soda rešitev naše naloge. Tedaj je $f(x,y)=c(x^2+y^2)$ za neki $c\in\mathbb{Q}$.*

Dokaz. Tudi tu veljata enakosti:

$$f(x+y,0)+f(0,x-y)=f(x,0)+f(0,x)+f(y,0)+f(0,-y),$$

$$f(x+y,0)+f(0,-(x-y))=f(y,0)+f(0,y)+f(x,0)+f(0,-x).$$

Če vstavimo $x=y=0$, dobimo $f(0,0)=0$. Zaradi sodosti funkcije f, pa je

$$f(x+y,0)+f(0,x-y)=f(x,0)+f(0,x)+f(y,0)+f(0,y). \qquad (1)$$

Za $x=y$ sledi od tod

$$f(2x,0)=2f(x,0)+2f(0,x).$$

Če vstavimo še $x=-y$, dobimo

$$f(0,2x)=2f(x,0)+2f(0,x)=f(2x,0).$$