PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 4
Strani 226–231

Ivan Vidav:

ŠTEVILA, KI SO VSOTE DVEH KUBOV

Ključne besede: matematika, teorija števil, naravna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1141-Vidav.pdf

ŠTEVILA, KI SO VSOTE DVEH KUBOV

O slavnem indijskem matematiku Srinivasi Ramanujanu (1887 - 1920) je šel glas, da je vsako naravno število njegov osebni prijatelj. Vedel je namreč, kaj je značilno za posamezna števila. Ko je med bivanjem v Angliji zbolel in nekaj časa ležal v neki londonski bolnišnici, ga je obiskal angleški matematik G.H. Hardy. Povedal je, da se je pripeljal s taksijem s številko 1729 in da se mu ta številka zdi pusta in nezanimiva. "Prav nasprotno", je rekel Ramanujan, "zelo zanimiva je. 1729 je najmanjše naravno število, ki se da na dva različna načina zapisati kot vsota dveh kubov." Res je

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Ali so še druga števila s to lastnostjo? Preden odgovorimo na to in podobna vprašanja, si poglejmo, kako je z vsotami kvadratov.

Najmanjše naravno število, ki se da na dva različna načina zapisati kot vsota dveh kvadratov, je 25, namreč

$$25 = 3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2.$$

Prav tako je

$$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2.$$

V drugi izrazitvi števila 25 nastopa sumand nič, v drugi izrazitvi števila 50 sta sumanda enaka in zato nista tuji si števili. Pač pa se da 65 zapisati na dva načina kot vsota kvadratov dveh od nič različnih tujih si števil, namreč

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2.$$

Bralec naj se sam prepriča, da velja isto za števila 85, 145 in 221. So pa tudi števila, ki jih lahko izrazimo na več kakor dva načina kot vsoto dveh kvadratov, na primer 1105 na štiri načine:

$$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

Povrnimo se zdaj h kubom! Ni vsako naravno število vsota dveh kubov. Pravzaprav so taka števila zelo redka. Na primer $9 = 1^3 + 2^3$ je, 10, 11, 12, 13, 14 in 15 pa niso.

Naj bo dano naravno število m. Če je vsota dveh kubov, obstajata naravni števili x in y, ki zadoščata enačbi

$$x^3 + y^3 = m. \tag{1}$$

Pri danem m bi radi ugotovili, ali je ta enačba rešljiva z naravnima številoma x in y, in če je, našli rešitev. Obstaja več metod, kako se lotiti te naloge. Oglejmo si najpreprostejšo, namreč s poskušanjem. Zapišimo enačbo (1) v obliki

$$y^3 = m - x^3.$$

Ker niti x niti y ni negativen, mora biti

$$0 \leq x^3 \leq m, \quad \text{torej} \quad 0 \leq x \leq \sqrt[3]{m}.$$

V izraz $m - x^3$ vstavimo za x zaporedoma 0, 1, 2, ... do največjega naravnega števila, ki ni večje od $\sqrt[3]{m}$, in vsakokrat pogledamo, ali je razlika $m - x^3$ popolni kub. S končno mnogo koraki tako ugotovimo, ali je enačba (1) rešljiva, in najdemo rešitev, kadar je.

Zgled 1. Naj bo $m = 1241$. Tu je $\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{1241} < 11$. S poskušanjem ugotovimo, da je izraz $1241 - x^3$ popolni kub pri $x = 8$:

$$1241 - x^3 = 1241 - 8^3 = 1241 - 512 = 729 = 9^3.$$

Ena rešitev enačbe (1) je v tem primeru $x = 8, y = 9$, število 1241 pa je vsota dveh kubov: $1241 = 8^3 + 9^3$.

Zgled 2. Pri $m = 1320$ imamo $\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{1320} < 11$. Za noben x med 0 in 10 ni razlika $1320 - x^3$ popolni kub. Zato število 1320 ni vsota dveh kubov.

Včasih ima enačba (1) dve ali celo več rešitev v naravnih številih. Tedaj se da m zapisati na dva (ali več) načinov kot vsota dveh kubov. Vendar je treba tu opozoriti na tole: Število 35 lahko izrazimo v obliki $35 = 2^3 + 3^3$ in v obliki $35 = 3^3 + 2^3$. Vendar v tem primeru ne bomo rekli, da smo 35 zapisali na dva načina kot vsoto dveh kubov, saj smo drugi zapis dobili tako, da smo v prvem zapisu samo sumanda zamenjali. Rešitvi (x_1, y_1) in (x_2, y_2) enačbe (1) dasta različna zapisa le tedaj, kadar se x_2 razlikuje od x_1 in y_1 (potem se seveda tudi y_2 razlikuje od x_1 in y_1). Če smo dve taki rešitvi našli, je

$$m = x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 \tag{2}$$

in smo m izrazili na dva različna načina kot vsoto dveh kubov.

Ramanujan je ugotovil, da je najmanjši m, pri katerem ima enačba (1) dve različni rešitvi v naravnih številih, enak 1729. Ni pa to edini tak m. Nadaljnji primer je

$$443889 = 17^3 + 76^3 = 38^3 + 73^3. \tag{3}$$

Ali je v (2) lahko katero izmed števil x_1, y_1, x_2, y_2 enako nič? (Spomnimo se primera s kvadrati: $25 = 3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2$.) Denimo, da bi bil $y_2 = 0$. Potem bi veljala enačba

$$x_1^3 + y_1^3 = x_2^3, \tag{4}$$

kjer so x_1, y_1, x_2 naravna števila in nobeno od njih ni enako nič. To pa je Fermatova enačba za tretje potence. Vemo, da Fermatova trditev za tretje potence velja: Enačba (4) ni rešljiva v naravnih od nič različnih številih. Zato se nobeno naravno število, ki je kub, ne da izraziti kot vsota dveh od nič različnih kubov.

Doslej nas je zanimalo vprašanje, kdaj je m vsota dveh kubov **naravnih** števil, in smo zato iskali rešitve enačbe (1) le v naravnih številih. Lahko pa si zastavimo tudi vprašanje, kdaj je m vsota dveh kubov **celih** (pozitivnih ali negativnih) števil. V tem primeru moramo iskati rešive enačbe (1) v celih številih x in y. Ker je m pozitiven, je kvečjemu eno izmed števil x in y negativno. Pa naj bo eno negativno! Smemo privzeti, da je y negativen. Zamenjajmo y z $-y$, kjer je zdaj y naravno število. Ker je $(-y)^3 = -y^3$, imamo namesto enačbe (1) enačbo

$$x^3 - y^3 = m. \tag{5}$$

Spet iščemo njene rešitve v naravnih številih x in y. Če rešitev obstaja, je m razlika dveh kubov naravnih števil, npr. $7 = 2^3 - 1^3$.

Kako pri danem m ugotovimo, ali je enačba (5) rešljiva z naravnima številoma x in y? Ker je m pozitiven, mora seveda biti $x > y$ in, ker sta x in y naravni števili, je x najmanj za 1 večji od y, torej $x \geq y + 1$. Zato velja ocena

$$m = x^3 - y^3 \geq (y+1)^3 - y^3 = 3y^2 + 3y + 1 > 3y^2.$$

Potemtakem je

$$3y^2 < m \quad \text{in od tod} \quad y < \sqrt{m/3}.$$

V izraz $m + x^3$ vstavimo za x po vrsti 0, 1, 2, ... do največjega naravnega števila, ki ne presega $\sqrt{m/3}$, in vsakokrat pogledamo, ali je ta izraz popolni kub. Tako spet v končno mnogo korakih ugotovimo, ali je enačba (5) rešljiva in, če je, najdemo rešitev.

Zgled 1. Naj bo $m = 169$. Tu je $\sqrt{m/3} = \sqrt{169/3} < 8$. V izraz $169 + x^3$ vstavimo za x števila od 0 do 7. Pri $x = 7$ dobimo popolni kub

$$x^3 + 169 = 7^3 + 169 = 343 + 169 = 512 + 8^3.$$

Zato je 169 razlika dveh kubov naravnih števil: $169 = 8^3 - 7^3$. Ker lahko pišemo $169 = 8^3 + (-7)^3$, je 169 tudi vsota dveh kubov celih števil.

Zgled 2. Vzemimo $m = 200$, tako da je $\sqrt{m/3} = \sqrt{200/3} < 9$. Preskus pokaže, da izraz $200 + x^3$ ni popolni kub za nobeno naravno število x med 0 in 8. Zato število 200 ni razlika dveh kubov.

Če ima enačba (1) dve različni rešitvi v celih številih x in y, smo izrazili m na dva načina kot vsoto dveh kubov celih števil. Najmanjši pozitivni m, pri katerem obstajata dve taki rešitvi, je 91. Imamo namreč

$$91 = 3^3 + 4^3 = 6^3 + (-5)^3.$$

Ali obstajajo naravna števila, ki se dajo na tri različne načine izraziti kot vsote dveh kubov celih števil? Obstajajo in celo taka so, ki jih lahko izrazimo na več kakor tri načine. Kako pridemo do njih? Ena metoda je tale: Namesto celoštevilskih rešitev enačbe (1) iščemo njene racionalne rešitve, to je take, kjer sta x in y racionalni števili. Seveda je vsaka rešitev v celih številih tudi racionalna rešitev, narobe pa ne velja in je zato racionalnih rešitev v splošnem dosti več kakor celoštevilskih. Izkaže se, da ima enačba (1) pri nekaterih m celo neskončno racionalnih rešitev (celoštevilskih pa je vselej le končno mnogo). Povejmo brez dokaza, da to velja pri $m = 7$ in $m = 9$. Tukaj tudi ne bomo opisovali metod, ki nas privedejo iz danih racionalnih rešitev do novih takih rešitev.

Naj bo torej m število, pri katerem ima enačba (1) neskončno racionalnih rešitev, in naj bo $r > 1$ poljubno naravno število. Izberimo si r racionalnih rešitev enačbe (1), ki jih zaznamujmo z

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_r, y_r). \tag{6}$$

Za vsak indeks i velja zveza $x_i^3 + y_i^3 = m$. Vsi x_i in y_i so racionalna števila in se dajo zato zapisati v obliki okrajšanih ulomkov. Če je D najmanjši skupni imenovalec teh ulomkov, so $Dx_1, Dy_1, Dx_2, Dy_2, \ldots, Dx_r, Dy_r$ cela števila.

Oglejmo si zdaj enačbo

$$x^3 + y^3 = D^3 m. \tag{7}$$

Za vsak indeks i zadoščata $x = Dx_i$ in $y = Dy_i$ tej enačbi. Res je

$$x^3 + y^3 = (Dx_i)^3 + (Dy_i)^3 = D^3(x_i^3 + y_i^3) = D^3 m.$$

Tako smo našli r celoštevilskih rešitev enačbe (7), število $D^3 m$ pa se da na r različnih načinov zapisati kot vsota dveh kubov celih števil, namreč

$$D^3 m = (Dx_1)^3 + (Dy_1)^3 = (Dx_2)^3 + (Dy_2)^3 = \ldots = (Dx_r)^3 + (Dy_r)^3. \tag{8}$$

Zgled. Povedali smo, da ima enačba

$$x^3 + y^3 = 7$$

neskončno racionalnih rešitev. Vzemimo naslednje tri

$$x_1 = 2, y_1 = -1; \quad x_2 = \frac{5}{3}, y_2 = \frac{4}{3}; \quad x_3 = \frac{73}{38}, y_3 = -\frac{17}{38}.$$

Najmanjši skupni imenovalec teh ulomkov je $D = 114$. Zato lahko zapišemo število $7 \times 114^3 = 10370808$ na tri načine kot vsoto dveh kubov:

$$10370808 = 190^3 + 152^3 = 228^3 + (-114)^3 = 219^3 + (-51)^3. \tag{9}$$

V izrazitveh (8) niso vselej vsi kubi pozitivni, ker so lahko nekatera izmed števil x_i in y_i negativna. V pravkar navedenem zgledu sta dva kuba negativna. Velja pa tole: Če ima enačba (1) pri nekem m neskončno racionalnih rešitev, ima tudi neskončno pozitivnih racionalnih rešitev. Zato smemo privzeti, da so vse rešitve (6) pozitivne. Tako pridemo do števila $D^3 m$, ki se da zapisati na r različnih načinov kot vsota dveh kubov naravnih števil.

Pri natančnejšem ogledu izrazitve (9) opazimo, da imata 190 in 152 skupni faktor 38, nadalje 228 in 114 skupni faktor 114, 219 in 51 pa skupni faktor 3. Število 10370808 smo sicer izrazili na tri različne načine kot vsoto dveh kubov, vendar ne kot vsoto dveh kubov tujih si celih števil. Ali sploh obstajajo naravna števila, ki se dajo zapisati na tri načine kot vsota dveh kubov tujih si celih števil? Obstajajo, in sicer je najmanjše med njimi število 3242197, pripadajoča izrazitev pa se glasi

$$3242197 = 76^3 + 141^3 = 85^3 + 138^3 = 202^3 + (-171)^3. \tag{10}$$