PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 4
Strani 232–236

Janez Strnad:

SMUČANJE PRI VELESLALOMU

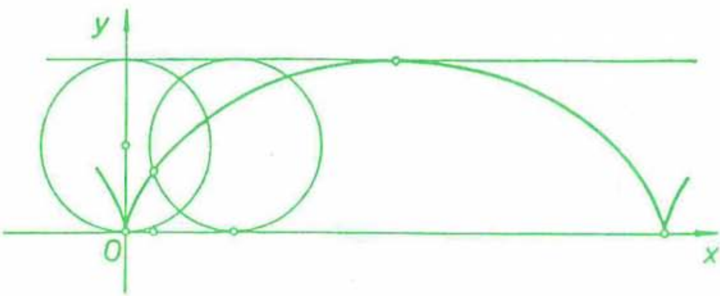
Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1141-Strnad.pdf

SMUČANJE PRI VELESLALOMU

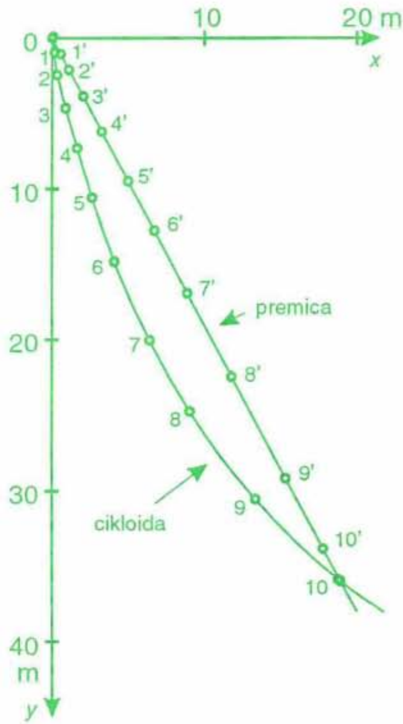
Tekmovalec v veleslalomu vidi ob štartu pred seboj klanec in prva vratca. Po kateri poti naj se požene, da bo najhitrejši? Ali naj se usmeri naravnost proti notranjemu količku? Ta pot je najkrajša, a ni najboljša, če količek ne stoji v smeri naravnost proti dolini. Tekmovalec najbolj pospeši, če se usmeri naravnost proti dolini. Toda ta pot ga vodi od količka proč in je daljša. Tekmovalec ne razmišlja, ampak po izkušnjah poišče srednjo pot. Najprej se požene naravnost proti dolini, da čim prej doseže kolikor mogoče veliko hitrost, in nato postopno zavija proti količku.

Podobno vprašanje so si postavili matematiki že pred koncem 17. stoletja. Po kakšni krivulji v navpični ravnini naj se giblje drobno telo, da bo v najkrajšem času prišlo iz začetne točke v končno? Najbolje je misliti na preluknjano kroglico, ki drsi brez trenja po debelejši žici z obliko poti od prve do druge točke. O krivulji s to lastnostjo, imenovali so jo *brahistokrono*, so razpravljali Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 do 1716) in brata Jakob (1654 do 1705) in Johann Bernoulli (1667 do 1748). Starejši Bernoulli velja za začetnika *variacijskega računa* prav zaradi svojega prispevka k spoznanju (v letih 1696 in 1697), da je brahistokrona *cikloida*. To krivuljo opiše točka na obodu valja, ki se kotali po vodoravni podlagi, ne da drsel (slika 1).



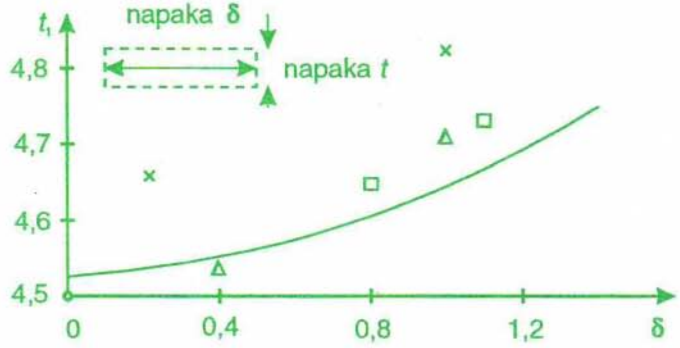
Slika 1. Po cikloidi se giblje točka na obodu valja, ki se enakomerno kotali po vodoravni podlagi in nič ne drsi.

Pri smučanju je klanec brez grbin nagnjena, ne navpična ravnina. Od začetne točke, to je od štarta, do končne, to je do notranjega količka, dospe tekmovalec najhitreje, če se smuča po cikloidi. Cikloida je obrnjena tako, da ima ost v začetni točki. Pri tem zanemarimo trenje smuči na snegu in zračni upor ter ne upoštevamo, da se tekmovalec poganja s palicami. Francoski smučarji so se namenili misel podrobneje preskusiti. Izbrali so si gladek zglajen klanec z nagibom dobrih 26° in postavili točko, do katere se bilo treba prismučati, 37 metrov po klancu v smeri proti dolini in 19 metrov vstran (slika 2). Nato so se trije dobri smučarji spustili od prve točke do druge po raznih poteh. Izmerili so jim čas in določili pot. Zapeljali so zdaj po cikloidi, zdaj po zveznici med točkama ali vmesnih krivuljah. Zares so namerili po krivulji, ki se je skoraj prilegala cikloidi, za desetino sekunde krajši čas kot po zveznici (slika 3). Pri času okoli štiri sekunde in pol je vredno upoštevanja.

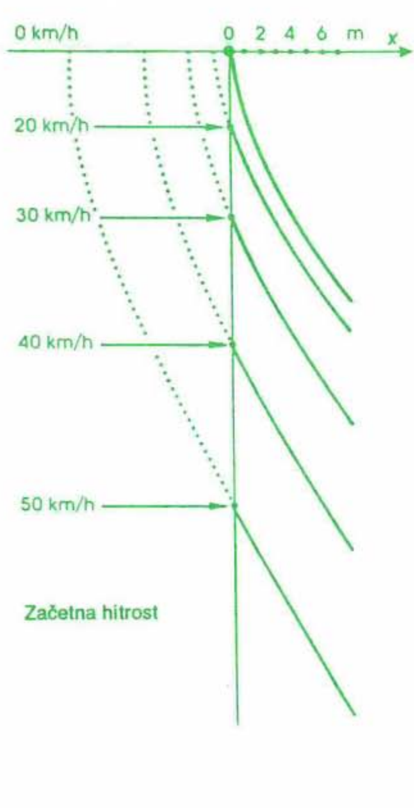


Slika 2. Smučar bi rad porabil najkrajši čas za pot od točke O do točke P. Po cikloidi rabi čas 4,52 sekunde, po premici pa 4,65 sekunde. Lego smučarja v zaporednih desetinah prvega časa (0,452 s) kažejo točke. Po ustreznih točkah je mogoče presoditi, kako smučar po premici zaostaja za smučarjem po cikloidi.

Doslej smo razmišljali le o vožnji od štarta do prvih vratc. Od prvih vratic naprej vozi tekmovalec podobno kot pred prvimi vrati, le da že ima določeno hitrost. Tako je, kot bi se začel smučati više na klancu. Čim večja je začetna hitrost, to je hitrost v prejšnjih vratcih, tem manj je cikloida ukrivljena (slika 4). Tako razumemo načelo današnjih tekmovalcev: potegni naravnost (od vratc do vratc), suči kratko (ob količku) - francosko TDVC: tirer droit, virer court. Naše razmišljanje ga naknadno potrjuje. Načelo je uporabno pri veleslalomu, pri katerem je treba prevoziti 70 do 90 vratc na klancu z višinsko razliko okoli 300 metrov in srednjim nagibom okoli 25°. Smiselno prilagojeno pa lahko uporabijo tudi pri superveleslalomu in celo pri smuku. Ker ima večjo hitrost, pa tekmovalec ne vozi tako tesno ob količku kot pri veleslalomu, da smučanje ne bi postalo manj zanesljivo.



Slika 3. Na navpično os je nanesen čas, ki ga rabi smučar za pot od točke O do točke P, na vodoravno pa parameter δ. Ta parameter podaja, kako se tir razlikuje od cikloide ($\delta = 0$). Pri premici meri $\delta = 1$. Točke kažejo izmerjene vrednosti za tri različne smučarje, ki so se spustili po šestih različnih tirih. Krivulja kaže izračunani čas. Račun da za cikloido čas 4,52 sekunde in za premico 4,65 sekunde. Izmerjeni čas je zaradi trenja, ki smo ga zanemarili, nekoliko daljši. Napako pri merjenju časa in pri določanju parametra kaže črtkani pravokotnik. Podatki so vzeti iz članka Gilberta Reinischa *Ski: le chemin le plus court n'est pas le plus rapide* (Smučanje: najkrajša pot ni najhitrejša) Recherche **23** (1992) 356.



Slika 4. Čim večja je hitrost v prejšnjih vratcih, tem bolj raven je tir, po katerem je čas za smučanje do naslednjih vratc najkrajši. Premislek po tej risbi potrjuje načelo "potegni naravnost, suči kratko".

Pospremimo razmišljanje z računi. V ravnino z nagibom α postavimo pravokotni koordinati sistem z izhodiščem v začetni točki, vodoravno osjo x in osjo y v smeri naravnost v dolino (slika 1). Mislimo na preluknjano kroglico, ki se brez trenja giblje po ukrivljeni žici. Na kroglico deluje poleg teže še sila žice, ki je vselej pravokotna na smer gibanja. Tako sila žice na kroglici ne opravi nobenega dela. V izreku o kinetični in potencialni energiji upoštevamo tedaj samo kinetično in potencialno energija: njuna vsota se ne spreminja. Kroglica na začetku miruje v izhodišču, zato je tedaj vsota kinetične in potencialne energije enaka nič, in taka ostane:

$$\frac{1}{2}mv^2 - may = 0.$$

$a = g \sin\alpha$ je komponenta težnega pospeška g po klancu navzdol, to je v smeri osi y. Mase kroglice m se lahko takoj znebimo. Negativni znak potencialne energije opozarja na to, da višina pojema, ko y narašča. Hitrost je določena kot kvocient kratkega odseka poti ds in časovnega razmika dt, v katerem kroglica prepotuje odsek $v = ds/dt$. Ta časovni razmik je $dt = = ds/\sqrt{2ay}$ in časovni razmik od začetne točke T_1 (0,0) do končne točke T_2 (x_1, y_1) dobimo tako, da prispevke za vse kratke odseke seštejemo

$$t = \int_{(1)}^{(2)} \frac{ds}{\sqrt{2ay}}.$$

Treba je določiti tir $y(x)$, pri katerem je čas t najkrajši pri določeni začetni in končni točki. Naloga ni lahka in sodi v variacijski račun. Tu jo bomo preskočili in kar zapisali odgovor.

Čas je najkrajši, če se kroglica giblje po cikloidi:

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = R(1 - \cos\varphi).$$

R je radij valja, s kotaljenjem katerega nastane cikloida, φ pa njegov zasuk. Kratek odsek poti izračunamo s Pitagorovim izrekom:

$$ds = \sqrt{(dy/d\varphi)^2 + (dx/d\varphi)^2}d\varphi = \sqrt{2R(1-\cos\varphi}d\varphi = \sqrt{2y}d\varphi$$

in s tem dobimo kar

$$t = \sqrt{\frac{R}{a}}\varphi.$$