PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 4
Strani 244–249

Milena Strnad:

ORNAMENTI NA RAVNINI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1141-Strnad.pdf

ORNAMENTI NA RAVNINI

Ob besedi *ornament* pomislimo na okrasne trakove, geometrijske vzorce s starogrške keramike,..., ki jih sestavljajo večkrat ponovljeni *osnovni vzorci* ali *motivi*. Morda se ob tem spomnimo tudi slike, ki jo dobimo, če poljuben predmet postavimo med dve vzporedni, nasproti si stoječi ravni zrcali. Njegova slika je neskončnokrat ponavljajoči se vzorec, torej ornament, ki je simetričen ne glede na obliko predmeta samega.

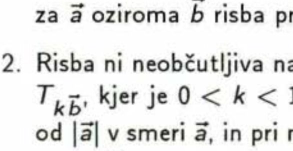
Bralcem Preseka prikličimo v spomin katero od slik iz španske Alhambre in članek *Ornamenti na traku* iz 3. številke lanskega Preseka ter zapis o ornamentih in grupah iz letošnje 2. številke.

Definicijo *ornamenta na ravnini* bomo naslonili na definicijo ornamenta na traku. Ornament na ravnini naj bo vsaka risba na ravnini, za katero obstajata dva nevzporedna neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, da velja:

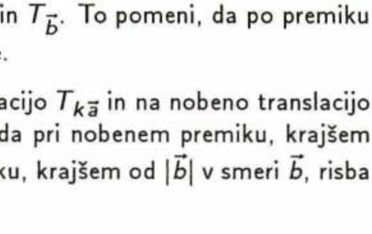
1. Risba je neobčutljiva na translaciji $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$. To pomeni, da po premiku za $\vec{a}$ oziroma $\vec{b}$ risba preide sama vase.
2. Risba ni neobčutljiva na nobeno translacijo $T_{k\vec{a}}$ in na nobeno translacijo $T_{k\vec{b}}$, kjer je $0 < k < 1$. To pomeni, da pri nobenem premiku, krajšem od $|\vec{a}|$ v smeri $\vec{a}$, in pri nobenem premiku, krajšem od $|\vec{b}|$ v smeri $\vec{b}$, risba ne preide vase.

V letošnji 2. številki Preseka smo srečali pojem ravninske mreže, določene s parom nevzporednih vektorjev. Očitno je, da je že množica vozlišč ravninske mreže zelo preprost ornament na ravnini (slika 1).

Vzemimo poljuben ornament na ravnini z ustreznima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz definicije in si oglejmo tema vektorjema pripadajočo ravninsko mrežo. Ta je seveda odvisna od izbire začetne točke. Ob primerni povezavi štirih vozlišč te



Slika 1. Vozlišča mreže kot najpreprostejši ornament.



Slika 2. Osnovni paralelogram ornamenta.

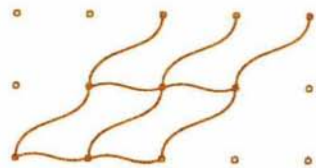
mreže lahko dobimo paralelogram. V primeru, da v notranjosti paralelograma ni nobenega vozlišča mreže, ga imenujemo *osnovni paralelogram ornamenta* (slika2). Pri tem dve sosednji stranici štejemo k paralelogramu, preostalih dveh pa ne.

Zaradi druge zahteve iz definicije ornamenta sledi, da ima osnovni paralelogram od nič različno ploščino. Če na osnovni paralelogram delujemo s translacijsko grupo, ki jo generirata translaciji $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$, napolnimo vso ravnino in sicer prekrijemo vsako točko ravnine natanko enkrat.

Del ornamenta, ki leži v osnovnem paralelogramu, imenujemo *osnovni vzorec*.

Osnovnih paralelogramov danega ornamenta je zaradi poljubne izbire začetne točke v mreži neskončno mnogo. Zato je tudi osnovnih vzorcev neskončno mnogo. Zares pa so nekateri med njimi posebej opazni. Lahko bi rekli, da so tipični za dani ornament.

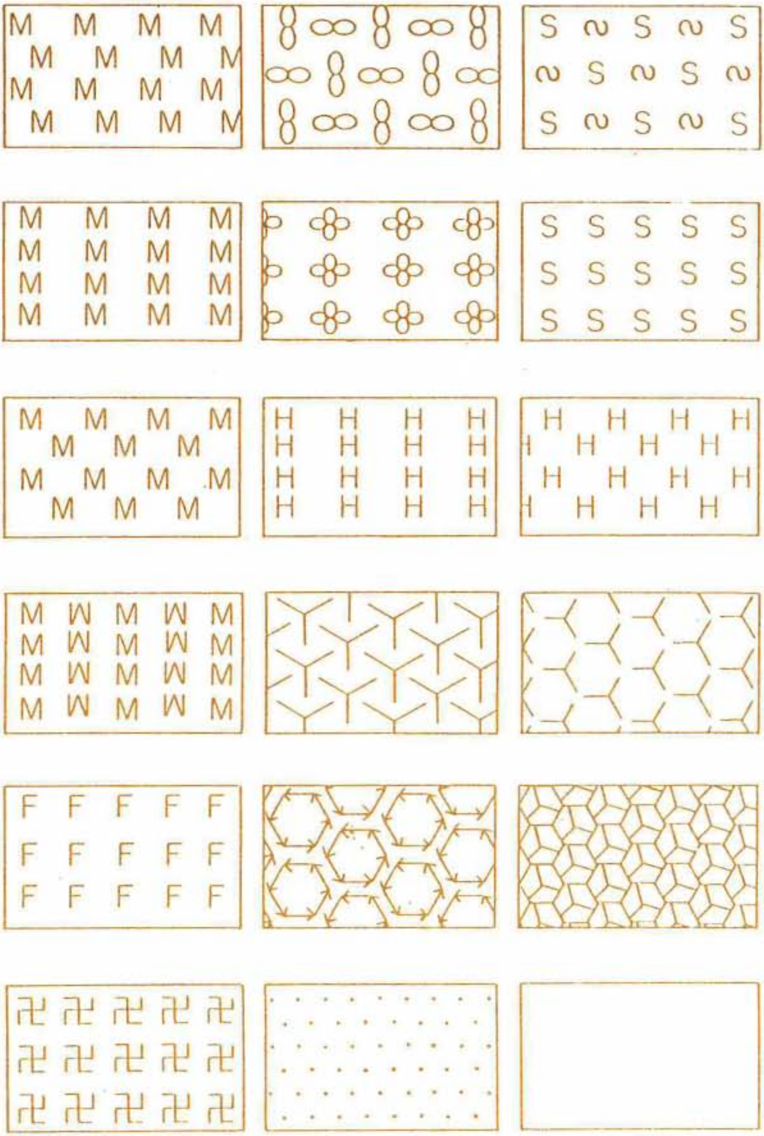
Če v osnovnem paralelogramu po dve in dve vzporedni stranici nadomestimo s skladnima krivuljama, dobimo zopet lik, s katerim napolnimo vso ravnino, če nanj delujemo s translacijsko grupo, ki jo generirata $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$. Tudi v tem primeru dobimo vsako točko natanko enkrat. Vsakemu liku s to lastnostjo pravimo *tipični lik* ornamenta. Vsi tipični liki zopet niso enako opazni. To je odvisno od posameznega ornamenta (slika3).



Slika 3. Tipični lik ornamenta.

Vsem ornamentom je skupno, da simetrijska grupa vsakega ornamenta vsebuje translacijsko grupo, ki jo generirata dve nevzporedni translaciji. Spomnimo se, da je simetrijska grupa grupa vseh izometrij, ki ornament ohranjajo.

Seveda pa se simetrijske grupe različnih ornamentov lahko med seboj razlikujejo. Če imata dva ornamenta isto simetrijsko grupo, pravimo, da sta iste vrste. Že v članku *Ornamenti in grupe* smo omenili, da je na ravnini 17 kristalografskih grup, to je grup, ki ohranjajo ravninsko mrežo. Prvi je že leta 1891 navedel vse ruski kristalograf *Fedorov*, strogo matematično pa sta njihov obstoj dokazala leta 1897 *Fricke* in *Klein* in neodvisno od njiju še *Nieggel* in *Polya* leta 1924. Pravimo jim tudi *tapetne grupe*, kar je za ravninske grupe zelo primeren izraz. Na ravnini imamo torej 17 različnih vrst ornamentov. Shematsko so prikazane na sliki 4.

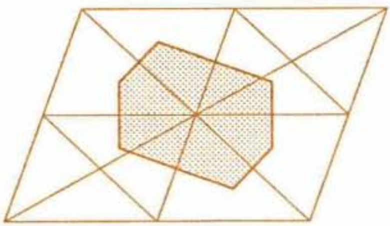


Slika 4. Grafična ponazoritev sedemnajstih kristalografskih ali tapetnih grup.

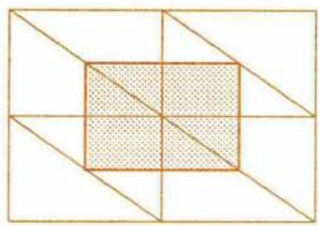
V zvezi z ornamenti si oglejmo zanimiv problem, ki izhaja iz naslednje lastnosti osnovnega vzorca ornamenta:
Osnovni paralelogram ali tipični del ornamenta, na katerega deluje ustrezna translacijska grupa, pokrije vso ravnino tako, da vse slike prekrijejo vsako točko ravnine natanko enkrat. Pravimo, da smo s paralelogrami oziroma tipičnimi liki ravnino *tlakovali*.

Ravnino lahko tlakujemo tudi z drugačnimi liki, ki niso tipični. Primer je *osnovna celica* mreže. Definiramo jo glede na izbrano vozlišče mreže. Pravimo:
Osnovna celica je množica vseh tistih točk ravnine, ki leže izbranemu vozlišču bliže kot kateremu koli drugemu vozlišču. Njene stranice leže na simetralah daljic, ki vežejo izbrano vozlišče s sosednjimi vozlišči (slika 5).

V splošnem je ta celica šestkotnik, ki ima po dve in dve stranici vzporedni. Samo v posebnem primeru, ko je osnovni paralelogram romb s kotom $\frac{\pi}{3}$, je šestkotnik pravilen, v pravokotnik pa se izrodi le, če je tudi osnovni paralelogram mreže pravokotnik (slika 6). Zakaj je tako, lahko premislite sami.



Slika 5. Osnovna celica mreže.



Slika 6. Izrojena osnovna celica.

Tudi osnovna celica mreže ima lastnost, da ravnino v celoti pokrije, če nanjo delujemo s translacijsko grupo, ki jo generirata $T_{\vec{a}}$ in $T_{\vec{b}}$, torej lahko z njo ravnino tlakujemo.

Osnovno znanje geometrije zadostuje, da odgovorimo tudi na vprašanje: S katerimi pravilnimi večkotniki lahko tlakujemo ravnino? To gre le s takimi pravilnimi n-kotniki, za katere je polni kot večkratnik notranjega kota:

$$k\frac{n-2}{n}180^\circ = 360^\circ, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Od tod sledi:

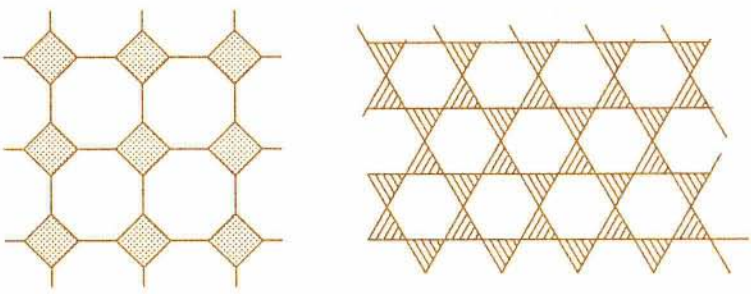
$$k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Število $n-2$ kotnika mora biti delitelj števila 4, torej je lahko 1,2 ali 4. Sledi, da ravnino lahko tlakujemo le z enakostraničnim trikotnikom, kvadratom in pravilnim šestkotnikom (slika 7).

Slika 7. Pravilno tlakovanje ravnine in dualnost ornamentov.

Mimogrede s slike 7 razberimo še povezave med posameznimi ornamenti, ki jih sestavimo iz enakostraničnega trikotnika, kvadrata ali pravilnega šestkotnika. Vidimo, da je stičišče oglišč šestih trikotnikov hkrati središče pravilnega šestkotnika, ki ga vrišemo v ornament; središča treh dotikajočih se šestkotnikov pa povežemo v enakostranični trikotnik. Središča večkotnika v enem ornamentu tvorijo oglišča večkotnika drugega ornamenta. Takim ornamentom pravimo, da so *dualni*. Tretji ornament, ki ga sestavljajo kvadrati, je dualen sam sebi.

Pravilni večkotniki ne izčrpajo vseh možnih tlakovanj ravnine. Za osnovni vzorec si namreč lahko izberemo sestavo dveh ali več pravilnih večkotnikov (slika 8).



Slika 8. Zahtevnejše tlakovanje ravnine.