PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 3
Strani 146–150

Boris Lavrič:

PARALELOGRAMSKO PRAVILO

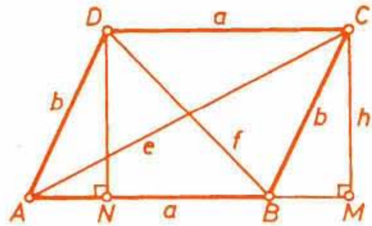
Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1137-Lavric.pdf

PARALELOGRAMSKO PRAVILO

Načrtajmo paralelogram $ABCD$ z diagonalama AC, BD in iz oglišč C, D spustimo višini CM, DN na nosilko stranice AB. Pravokotna trikotnika AND in BMD sta skladna, iz slike tedaj preberemo enakosti

$$g = |AN| = |BM|,$$
$$h = |DN| = |CM|.$$
$$a = |AB| = |CD|,$$
$$b = |BC| = |AD|.$$



Zaznamujmo še

$$e = |AC|, \; f = |BD|.$$

Pitagorov izrek za trikotnika AMC in BND nam da enakosti

$$e^2 = |AM|^2 + h^2, \; f^2 = |BN|^2 + h^2.$$

Seštejmo ju, upoštevajmo, da je ena od daljic AM in BN dolga $a+g$, druga pa $|a-g|$, in dobimo

$$e^2 + f^2 = (a+g)^2 + (a-g)^2 + 2h^2 = 2(a^2 + g^2 + h^2).$$

Od tod zaradi enakosti $g^2 + h^2 = b^2$ za pravokotni trikotnik AND takoj sledi

paralelogramsko pravilo

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Kratko in elegantno lahko to pravilo dokažemo s pomočjo vektorjev, kar pa prepustimo tistim, ki te vsaj nekoliko poznajo.

Oglejmo si zdaj splošnejši primer. Vzemimo štiri točke A, B, C in D v prostoru. Dolžine stranic AB, BC, CD in DA štirikotnika $ABCD$ zaznamujmo zaporedoma z a, b, c, d, dolžini diagonal AC, BD pa z e in f.

Dokažimo, da velja neenakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2, \tag{1}$$

in razmislimo, za katere štirikotnike $ABCD$ se (1) prelevi v enakost.

Nad stranicama AB in BC zgradimo paralelogram $ABCD_1$, nad stranicama CD in DA pa paralelogram AB_1CD. Iz zvez

$$AB_1 \| CD, \ |AB_1| = |CD| = c,$$

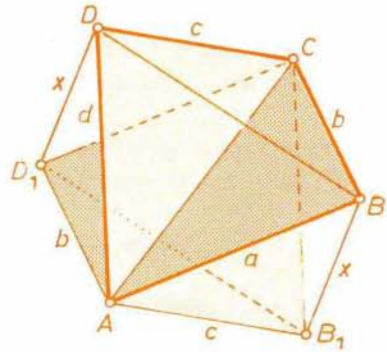
$$AD_1 \| BC, \ |AD_1| = |BC| = b$$

in

$$AD \| B_1C, \ BC \| AD_1$$

sledi

$$B_1D_1 \| BD, \ BB_1 \| DD_1$$



(Oglej si vzporedni premik BB_1.), zato je tudi BDD_1B_1 paralelogram. Označimo

$$x = |BB_1| = |DD_1|,$$

zapišimo paralelogramsko pravilo za naštete paralelograme

$$\begin{aligned} e^2 + |B_1D|^2 &= 2(c^2 + d^2) \\ e^2 + |BD_1|^2 &= 2(a^2 + b^2) \\ |B_1D|^2 + |BD_1|^2 &= 2(x^2 + f^2) \end{aligned}$$

in od vsote prvih dveh enakosti odštejmo tretjo. Po preureditvi dobimo zvezo

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (e^2 + f^2),$$

ki dokazuje neenakost (1).

Enačaj nastopi v (1) seveda le tedaj, ko je $x = 0$, torej ko B sovpada z B_1 in D z D_1. To se zgodi natanko takrat, kadar $ABCD$ sovpada z AB_1CD in je potemtakem paralelogram z diagonalama AC in BD. Od tod sledi naslednji rezultat.

IZREK 1. **V štirikotniku $ABCD$ velja neenakost**

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2.$$

Enačaj je dosežen tedaj in le tedaj, kadar je $ABCD$ paralelogram z diagonalama AC in BD.

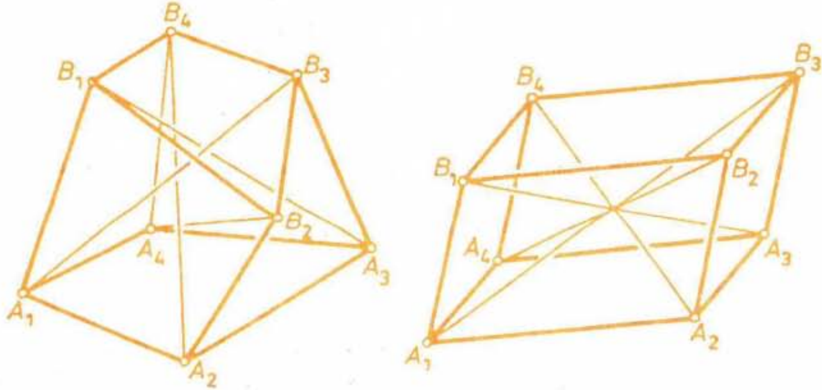
Prostorska posplošitev paralelograma je paralelepiped. To telo omejujejo trije pari skladnih vzporednih paralelogramov, ki se stikajo v dvanajstih robovih in osmih ogliščih. Paralelepiped ima štiri telesne diagonale. Je morda vsota kvadratov njihovih dolžin enaka vsoti kvadratov dolžin vseh njegovih robov?

Odgovorimo na to vprašanje v splošnejšem okviru. Vzemimo osem točk v prostoru, razvrstimo jih v zaporedje in označimo z

$$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4.$$

Nekatere daljice, ki vežejo pare teh točk, imenujmo "robovi", nekatere pa "telesne diagonale". Dolžine "robov" zaznamujmo z

$$|A_1A_2| = a_1,\ |A_2A_3| = a_2,\ |A_3A_4| = a_3,\ |A_4A_1| = a_4,$$
$$|B_1B_2| = b_1,\ |B_2B_3| = b_2,\ |B_3B_4| = b_3,\ |B_4B_1| = b_4,$$
$$|A_1B_1| = c_1,\ |A_2B_2| = c_2,\ |A_3B_3| = c_3,\ |A_4B_4| = c_4,$$



"telesne diagonale" pa naj merijo

$$|A_1B_3| = d_1,\ |A_2B_4| = d_2,\ |A_3B_1| = d_3,\ |A_4B_2| = d_4.$$

Dokažimo, da velja

IZREK 2. **Točke $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ v prostoru izpolnjujejo neenakost**

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+b_1^2+b_2^2+b_3^3+b_4^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2 \geq d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2.$$

Enačaj je dosežen natanko takrat, kadar je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2.

Dokaz. Seštejmo neenakosti, ki jim po izreku 1 ustrezajo štirikotniki

$$A_1A_2A_3A_4,\ B_1B_2B_3B_4,\ A_1A_3B_3B_1,\ A_4A_2B_2B_4. \tag{2}$$

Brž ko dobljeno neenakost poenostavimo, najdemo oceno iz izreka 2. Če je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2, so vsi štirje obravnavani štirikotniki paralelogrami, zato tedaj v neenakosti izreka 2 velja enačaj.

Predpostavimo zdaj, da je v tej neenakosti dosežen enačaj. S pomočjo izreka 1 vidimo, da so potem štirikotniki (2) paralelogrami. Ker imata tudi osmerici točk

$$A_1A_2B_2B_1A_4A_3B_3B_4,\ A_2A_3B_3B_2A_1A_4B_4B_1$$

iste "robove" in "telesne diagonale" kot prvotna osmerica, so tudi

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ A_3A_4B_4B_3,\ A_4A_1B_1B_4$$

paralelogrami. Od tod sledi, da je $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ paralelepiped s telesnimi diagonalami A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 in A_4B_2, dokaz izreka pa je s tem končan.

Sklenimo članek z nalogami.

1. S pomočjo paralelogramskega pravila izrazi dolžine težiščnic trikotnika z dolžinami njegovih stranic.