PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 3
Strani 134–136

Jože Grasselli:

KVADRATI RACIONALNIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, racionalna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1137-Grasselli.pdf

MATEMATIKA

KVADRATI RACIONALNIH ŠTEVIL

Število 7 se da zapisati kot vsota štirih kvadratov **celih** števil

$$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2. \tag{1}$$

Če vzamemo kakšno drugo ne preveliko naravno število, po krajšem poskušanju tudi zanj najdemo takšno izrazitev. Nekaj zgledov:

$$\begin{aligned} 15 &= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 \\ 17 &= 4^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 \\ 28 &= 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Seveda se je ob takih opažanjih že davno porodila domneva, ali ni morda vsako naravno število vsota štirih kvadratov celih števil. Ta domneva drži. Lagrange (1736 - 1813) je namreč dokazal: **Če je n naravno število, obstajajo takšna cela števila a, b, c, d, da je**

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{3}$$

Zgledi (2) kažejo, da je dano naravno število n v splošnem mogoče na več načinov razbiti na vsoto štirih kvadratov celih števil. Je pa takih načinov le končno mnogo. Med števili $0, 1, 2, \ldots n$ je namreč le končno mnogo kvadratov celih števil in le ti pridejo v poštev za sumande v (3).

Čisto drugače pa je, če vprašujemo po izrazitvah naravnega števila z vsoto štirih kvadratov **racionalnih** števil.

Pokažimo najprej, da je mogoče 1 zapisati na neskončno načinov z vsoto dveh kvadratov racionalnih števil.

Naj bosta k, l naravni števili. Števili

$$E = \frac{k^2 - l^2}{k^2 + l^2}, \; F = \frac{2kl}{k^2 + l^2}$$

sta racionalni in kratek račun pokaže, da je

$$E^2 + F^2 = 1.$$

Ko spreminjamo k, l po naravnih številih tako, da sta k, l tuja, eden sod in drugi lih ter $k > l$, dobimo same različne pare E, F. To pomeni: **Obstaja neskončno različnih racionalnih parov E, F, za katere je $E^2 + F^2 = 1$.**

Nekaj takih parov navaja tablica

k	l	E	F
2	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
3	2	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$
4	1	$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{17}$
4	3	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$
5	2	$\frac{21}{29}$	$\frac{20}{29}$
5	4	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{41}$

Povrnimo se k izrazitvi (3). Število n je naravno. Zato a, b, c, d ne morejo biti vsi nič. Vzemimo, da a ni nič. Pri celih a, b in racionalnih E, F sta $aE + bF, aF - bE$ racionalni števili. Velja tudi

$$a^2 + b^2 = (aE + bF)^2 + (aF - bE)^2. \tag{4}$$

O tem se prepričamo, ko na desni kvadriramo in upoštevamo, da je $E^2 + F^2 = 1$. Ko E, F spreminjamo, se sumanda na desni v (4) spreminjata, vsota pa ostaja $a^2 + b^2$. Naj bo u kakšna vrednost, ki jo zavzame $aE + bF$. Ker je $F = \sqrt{1 - E^2}$, iz $aE + b\sqrt{1 - E^2} = u$ izhaja kvadratna enačba $(aE - u)^2 = b^2(1 - E^2)$ za E. Obstajata zato največ dva različna E in tako največ dva različna para E, F, ko ima $aE + bF$ vrednost u. Ker je parov E, F neskončno, dobimo z njimi neskončno različnih vrednosti za $aE + bF$. Vsota $a^2 + b^2 > 0$ se da torej zmeraj na neskončno načinov izraziti z vsoto dveh kvadratov racionalnih števil. Podobno je

$$c^2 + d^2 = (cE + dF)^2 + (cF - dE)^2. \tag{5}$$

Če od števil c, d vsaj eno ni nič, je spet naravno število $c^2 + d^2$ na neskončno načinov izrazljivo z vsoto dveh kvadratov racionalnih števil.

Iz (3) po (4) in (5) sledi

$$n = (aE + bF)^2 + (aF - bE)^2 + (cE + dF)^2 + (cF - dE)^2. \tag{6}$$

Tako smo ugotovili: **Naravno število je mogoče na neskončno različnih načinov zapisati kot vsoto štirih kvadratov racionalnih števil.**

Zgled. V izrazitvi (1) števila 7 je $a = 2, b = c = d = 1$. Ko vzamemo iz tabele $E = \frac{5}{13}, F = \frac{12}{13}$, dobimo po (6)

$$7 = \left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2 + \left(\frac{17}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^2.$$

V (5) lahko za E, F izberemo tudi drugačni vrednosti kot v (4). Za $E_1 = \frac{3}{5}, F_1 = \frac{4}{5}$ je

$$7 = \left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

Pomudimo se sedaj še pri pozitivnih racionalnih številih. Pozitivno racionalno število ima obliko $\frac{n}{m}$, kjer sta n, m naravni števili. Naj bo m kvadrat naravnega števila v, $m = v^2$. Videli smo, da obstaja neskončno četveric racionalnih števil A, B, C, D, ko je $n = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$. Iz vsake teh izrazitev izhaja

$$\frac{n}{v^2} = \left(\frac{A}{v}\right)^2 + \left(\frac{B}{v}\right)^2 + \left(\frac{C}{v}\right)^2 + \left(\frac{D}{v}\right)^2$$

in $\frac{A}{v}, \frac{B}{v}, \frac{C}{v}, \frac{D}{v}$ so racionalna števila. Če m ni kvadrat naravnega števila, pišemo $n/m = (nm)/(m^2)$. Število $(nm)/(m^2)$ že ima v imenovalcu kvadrat naravnega števila in smo tako pri pravkar obravnavanem primeru. Vidimo: **Pozitivno racionalno število je mogoče na neskončno načinov izraziti z vsoto štirih kvadratov racionalnih števil.**

Jože Grasselli