PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 2
Strani 104–110

Milena Strnad:

ORNAMENTI IN GRUPE

Ključne besede: matematika, grupe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1127-Strnad.pdf

ORNAMENTI IN GRUPE

Ornamentov, te neizčrpne zakladnice umetnosti, smo se lotili že v eni prejšnjih številk Preseka. Spoznali smo, kako z ornamentom napolnimo neskončno dolg trak, definicijo ornamenta in njegove lastnosti pa smo oprli na študij izometrij. Tudi z ravninskimi ornamenti ni dosti drugače. Vendar za njihov natančnejši študij potrebujemo še en matematični pojem: *grupo*.

Grupo so uvedli v matematiko okoli leta 1830. Raziskovanja *Lagrangea*, *Chauchyja*, *Galoisa*, *Cayleya* in drugih matematikov so se vlekla skoraj stoletje, preden je definicija dobila obliko:

Grupa je množica $\mathcal{G}$ skupaj z dvomestno operacijo $\circ$, ki zadošča pogojem:

- Operacija je *zaprta*. To pomeni, da operacija $\circ$ vsakemu paru elementov iz $\mathcal{G}$ priredi neki element samo te množice:

$$\forall a, b \in \mathcal{G}: \quad (a, b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{G}.$$

- Operacija je *asociativna*. To pomeni, da so oklepaji pri združevanju poljubnih treh elementov prestavljivi:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{G}: \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

- V množici $\mathcal{G}$ obstaja *enota*, označimo jo z e, za katero velja

$$\forall a \in \mathcal{G}: \quad a \circ e = e \circ a = a.$$

- Vsak element iz množice $\mathcal{G}$ ima *inverzni element*, ki ga simbolično označimo z eksponentom -1:

$$\forall a \in \mathcal{G}, \quad \exists a^{-1} \in \mathcal{G}: \quad a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

Včasih uporabimo za operacijo ($\circ$) znak plus (+). Takrat inverzni element označimo s predznakom minus (-).

Inverzni element k a^{-1} je kar a, to je $(a^{-1})^{-1} = a$. Potenca a^n je krajši zapis za $\underbrace{a \circ a \circ a \ldots \circ a}_{n}$. Potenca a^{-n} je seveda $(a^{-1})^n$.

Če je operacija $\circ$ še *komutativna*, to je, če za vsaka dva elementa a in b iz $\mathcal{G}$ velja: $a \circ b = b \circ a$, govorimo o *komutativni grupi*.

Grupa je lahko *končna* ali *neskončna*, pač glede na to, ali je osnovna množica $\mathcal{G}$ končna ali neskončna.

Napravimo nekaj zgledov:

1. *Aditivna grupa celih števil.*
To je množica celih števil $\mathcal{Z} = \{0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots\}$ skupaj z operacijo običajnega seštevanja. Cela števila so za seštevanje zaprta, saj je vsota poljubnih dveh celih števil vedno celo število. Grupni aksiomi so kar računski zakoni za vsoto:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Ta grupa je komutativna ($a + b = b + a$) in neskončna, ker je pač celih števil neskončno mnogo. Enota je število 0, inverzni element k n pa $-n$.

2. *Aditivna grupa vektorjev ravnine* je množica vseh vektorjev ravnine, to je usmerjenih daljic z začetkom v izbrani točki, skupaj z operacijo *seštevanja vektorjev* po paralelogramskem pravilu. Operacija je zaprta. Je asociativna. Enota za seštevanje je vektor 0, inverz k vsakemu vektorju pa je njegov nasprotni vektor (slika 1). Tudi ta grupa je komutativna in neskončna. Podobno obstaja *aditivna grupa vektorjev v prostoru.*

Slika 1. Vektorju $\vec{a}$ nasprotni vektor $-\vec{a}$.

3. Kot primer za *transformacijsko grupo* vzemimo množico vseh vrtežev enakostraničnega trikotnika okrog njegovega središča, pri katerih se zavrteni trikotnik popolnoma prekrije s prvotnim. Pravimo, da taki vrteži trikotnik *ohranjajo* ali, da je trikotnik na take vrteže *neobčutljiv*. Imamo le tri take vrteže: trikotnik lahko zavrtimo za poljuben cel večkratnik kotov 120°, 240° in 0° (identiteta). Označimo prvi vrtež z a, drugega z b in tretjega z e. Vrteži a, b, e tvorijo grupo z operacijo sestavljanja teh vrtežev.

Operacijo v končni grupi lahko podamo s *tabelo*, ki ji rečemo tudi *grupna poštevanka*. Za zgled sestavimo tabelo za grupo iz primera 3:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Zapis je uporaben za končne grupe, katerih množice vsebujejo le malo elementov. Sicer pa se nepreglednosti izognemo tako, da poiščemo kar se da malo elementov, s katerimi lahko "izrazimo" vse elemente grupe.[1] Množici takih elementov rečemo *reduciran sistem generatorjev grupe*. Če tak nabor sestoji iz enega samega elementa, rečemo grupi *grupa z enim generatorjem*; če obstaja nabor z dvema elementoma, gre za *grupo z dvema generatorjema* itd.

Grupo z enim generatorjem smo srečali v zadnjem primeru. Že samo z elementom a lahko izrazimo vse elemente grupe: $b = a \circ a = a^2$, enota pa je $e = b \circ a = a \circ b = a^3$. Iz te zveze tudi sledi, da sta elementa a in b drug drugemu inverzna. Za dano grupo reducirani sistem generatorjev ni enolično določen. Grupo iz našega primera lahko generiramo na primer tudi z elementom b.

Primer neskončne grupe z enim generatorjem je na primer grupa celih števil. Generator je število 1.

Poglejmo še grupo iz štirih elementov e, a, b, c in z grupno poštevanko

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Iz tablice preberemo, da lahko vse elemente grupe izrazimo že z a in b:

---

[1] Pokazati se da, da za vsako grupo tak minimalen nabor elementov obstaja in ni nujno en sam.

$$e = a^2 \ (= b^2) \ \text{in} \ c = a \circ b \ (= b \circ a).$$

Z enim samim generatorjem te grupe ne moremo opisati. Za vajo se o tem prepričajte sami.

Grupam z enim generatorjem rečemu tudi *ciklične grupe*. Če je ciklična grupa končna, obstaja med elementi e, a, a^2, . . tudi taka potenca a^r, da je $a^r = e$. Grupo $\{e, \ a, \ , a^2, \ . . . a^{r-1}; \ a^r = e\}$ označujemo s $C_r(a)$. Če je ciklična grupa neskončna, so vse potence med seboj različne; tako grupo označimo s $C_\infty(a)$.

***

Vzemimo zdaj za množico $\mathcal{G}$ množico *transformacij* (to je povratno enoličnih preslikav) neke množice X, za operacijo pa sestavo preslikav. Take grupe imenujemo *transformacijske grupe*. Primer take grupe je *grupa vseh izometrij ravnine* (*Evklidova grupa ravnine*), pa *grupa translacij* (*vzporednih premikov*) ali *grupa vrtežev* (*rotacijska grupa ravnine*). Podobno lahko govorimo tudi o izometrijah trirazsežnega prostora ter o Evklidovi grupi trirazsežnega prostora.

Preslikavo dveh grup, pri kateri se elementi ene preslikajo povratno enolično na elemente druge in preide operacija prve v operacijo druge, imenujemo *izomorfizem*.

Poglejmo si najprej primer: logaritemska funkcija je izomorfizem $\ln \ : \ (\mathcal{R}^+, \circ) \mapsto (\mathcal{R}, +)$. Enakost $\ln(x \circ y) = \ln x + \ln y$, ki jo lahko zapišemo tudi v obliki $xy = \ln^{-1}(lnx + \ln y)$, pove kako računamo produkt: logaritmiramo, seštejemo, antilogaritmiramo.

Prav lahko se je prepričati, da je grupa vseh premikov v ravnini izomorfna grupi vektorjev ravnine. Grupa vrtežev okrog dane točke pa je izomorfna aditivni grupi kotov. Tudi ciklični grupi $C_r(a)$ in $C_r(b)$ sta izomorfni. Zaradi izomorfizma ju včasih sploh ne razlikujemo. Tedaj označimo ciklično grupo kar s C_r, neskončno ciklično grupo pa s C_∞.

Definirajmo še *podgrupo*. Če je množica $\mathcal{H}$ podmnožica $\mathcal{G}$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ in je $\mathcal{H}$ grupa za isto operacijo kot $\mathcal{G}$, rečemo, da je grupa $\mathcal{H}$ *podgrupa* grupe $\mathcal{G}$.

Grupa $C_2 = \{e, a^2\}$ je na primer podgrupa grupe $C_4 = \{e, a, a^2, a^4\}$.

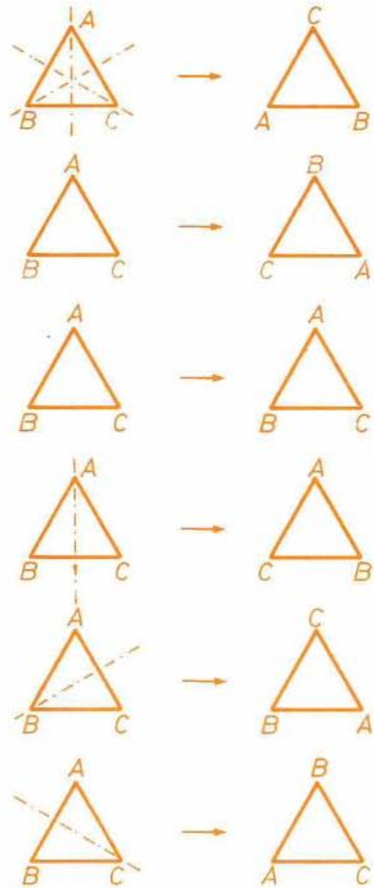
Zdaj smo dovolj pripravljeni, da si pobliže ogledamo *Evklidovo grupo ravnine*. Posebej nas bodo zanimale njene podgrupe.

Vzporedni premiki v ravnini sestavljajo podgrupo Evklidove grupe, prav tako tudi vsi vrteži okoli izbrane točke. Ker za vzporedne premike lahko izberemo različne smeri, za središče vrteža pa vsako točko ravnine, je takih podgrup Evklidove grupe neskončno. Vse translacijske grupe kot tudi grupe vrtežev so seveda med seboj izomorfne.

Kako pa je z zrcaljenji? Zrcaljenje Z_p čez dano premico in identiteta I tvorita grupo. Ker ima samo dva elementa ($Z_p \circ Z_p = I$), je izomorfna C_2. Takih podgrup je v Evklidovi grupi spet toliko, kot je različnih premic v ravnini, torej neskončno. Sestava zrcaljenj preko dveh premic je vzporedni premik, če sta premici vzporedni, in vrtež, če se premici sekata. Ker torej množica vseh zrcaljenj ni zaprta za sestavo, ni podgrupa Evklidove grupe.

Za nas bodo posebno zanimive podgrupe Evklidove grupe z lastnostjo, da vsi njihovi elementi ohranjajo kakšen izbrani lik. Bralec se lahko sam prepriča, da množica vseh izometrij ravnine, s katerimi se izbrani lik preslika nase, zares tvorijo podgrupo. Imenujmo jo *simetrijska grupa lika*. Simetrijske grupe likov so odvisne od oblike lika. Tako imajo podobni liki iste simetrijske grupe.

Če je lik popolnoma nesimetričen, vsebuje njegova simetrijska grupa le identiteto. Simetrijska grupa črk E in A je izomorfna C_2; generator je zrcaljenje čez simetralo



Slika 2. Simetrijska grupa enakostraničnega trikotnika

---

[2] Več o tem lahko bralec izve iz knjige I.Grossman, W.Magnus, *Grupe i njihovi grafovi*, Školska knjiga, Zagreb 1975.

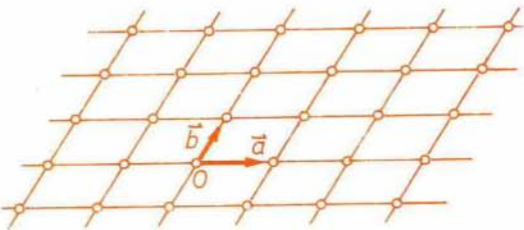
črke. Simetrijska grupa črke N je tudi izomorfna C_2; generator je vrtež za 180^o okrog njene srednje točke.

V abstraktnem smislu gre torej za isto grupo, čeprav imata različno geometrijsko vsebino. Simetrijska grupa enakostraničnega trikotnika ima 6 elementov, generatorja sta zrcaljenje čez eno simetralo in vrtež za kot 120^o okrog središča lika (slika 2).

Simetrijske grupe pravilnih večkotnikov imenujemo *diedrske grupe*. Zaznamujemo jih z D_n, kjer je n število oglišč pravilnega večkotnika. Generatorja sta zrcaljenje preko ene od simetral in vrtež za kot $2\pi/n$ okrog središča trikotnika.[2]

Končno omenimo še *simetrijsko grupo ravninske mreže*. Ravninsko mrežo dobimo tako, da si najprej izberemo par nevzporednih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ z izhodiščem O, nato pa nosilki vektorjev premaknemo s translacijsko grupo, ki jo *generirata* translaciji T_a in T_b (slika 3). S tem povemo, da lahko vse elemente te grupe izrazimo samo z njima. *Vozlišča* mreže, to so preseki teh premic, so določena z vektorji

$$n\vec{a} + m\vec{b} \quad n, m \in Z.$$



Slika 3. Ravninska mreža

Rečemo tudi: vozlišča dobimo tako, da delujemo s translacijsko grupo na izhodišče O. Simetrijska grupa ravninske mreže vsebuje kot podgrupo vsaj simetrijsko grupo, ki jo generirata T_a in T_b, pa tudi rotacijsko grupo, ki jo generira vrtež za 180^o. Le redke so mreže, ki jih ohranijo tudi druge rotacijske grupe; a še te so kvečjemu take, ki jih generirajo vrteži za kote $360^o/n$, kjer je n 1, 2, 3, 4 ali 6.

S to ugotovitvijo smo se že dotaknili *kristalografskih grup*, ki ohranjajo mrežo. Omenimo le, da so na neskončnem traku našteli 7, na ravnini 17 in v prostoru 230 takih grup. Ime so dobile po tem, ker ohranjajo prostorsko razporeditev atomov v kristalih. Zakaj jih obstaja prav toliko, je mogoče