PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 2
Strani 72–77

Darjo Felda:

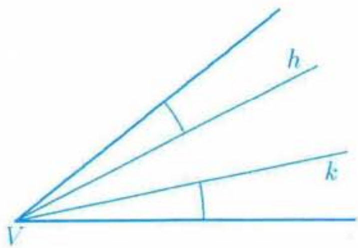
LEMOINOVA TOČKA TRIKOTNIKA

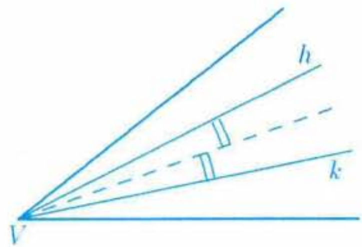
Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1127-Felda.pdf

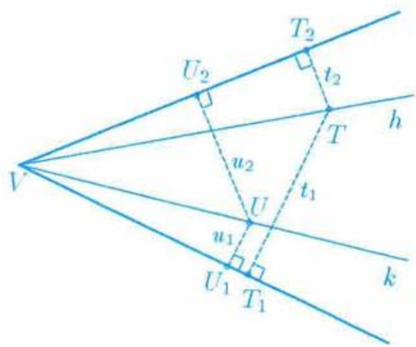
LEMOINOVA TOČKA TRIKOTNIKA

Pravimo, da sta poltraka h in k s skupnim začetkom v vrhu V danega kota *izogonalna*, če je simetrala danega kota tudi simetrala kota $\sphericalangle(h, k)$. Večkrat uporabljamo krajši izraz *izogonala* namesto *izogonalni poltrak*.





Trditev 1: Točki T in U ležita vsaka na eni izmed izogonal kota natanko takrat, ko sta razmerji njunih razdalj do krakov kota recipročni števili.

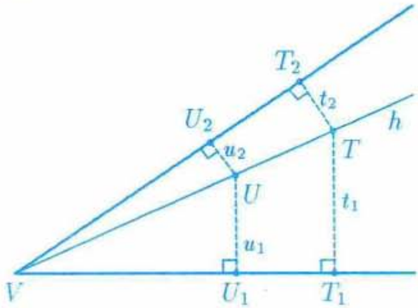


Dokaz: Označimo razdalje s t_1, t_2, u_1, u_2 (kot na sliki) in naj velja $\frac{u_1}{u_2} = \frac{t_2}{t_1}$. Štirikotnika VU_1UU_2 in VT_1TT_2 sta tetivna (imata po dva nasproti ležeča prava kota) in $\sphericalangle U_1UU_2 = \sphericalangle T_1TT_2$, saj je kot z vrhom V skupen. Od tod pa zaradi predpostavke sledi, da sta trikotnika $\triangle U_1UU_2$ in $\triangle T_2TT_1$ podobna, zato je $\sphericalangle U_1U_2U = \sphericalangle T_2T_1T$. Uporabimo spet tetivnost: kota $\sphericalangle U_1U_2U$ in $\sphericalangle U_1VU$ sta obodna nad istim lokom, zato sta enaka, analogno velja $\sphericalangle T_2T_1T = \sphericalangle T_2VT$. Enakost $\sphericalangle U_1VU = \sphericalangle T_2VT$ pove, da ležita točki T in U vsaka na eni izmed izogonal.

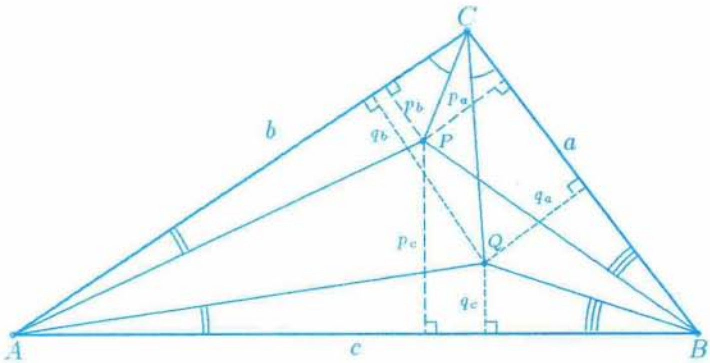
Tudi drugi del dokaza je enostaven. Naj točki T in U ležita vsaka na eni izmed izogonal kota z vrhom V. Tedaj velja $\sphericalangle U_1VU = \sphericalangle T_2VT$. Tako kot prej je zaradi enakosti obodnih kotov nad istim lokom $\sphericalangle U_1VU = \sphericalangle U_1U_2U$ in $\sphericalangle T_2VT = \sphericalangle T_2T_1T$, zaradi skupnega kota z vrhom V v obeh tetivnih štirikotnikih pa še $\sphericalangle U_1UU_2 = \sphericalangle T_1TT_2$. Trikotnika $\triangle U_1UU_2$ in $\triangle T_2TT_1$

sta zato podobna (enaki koti) in velja $\frac{u_1}{u_2} = \frac{t_2}{t_1}$.

Mimogrede povejmo še, da razmerje razdalj do krakov kota ni odvisno od izbire točke na poltraku. Po Talesovem izreku velja $\frac{u_1}{t_1} = \frac{u_2}{t_2}$ oziroma $\frac{u_1}{u_2} = \frac{t_1}{t_2}$.



Trditev 2: Naj bosta dana trikotnik $\triangle ABC$ in poljubna točka P v njegovi notranjosti. Izogonale k poltrakom $[AP)$, $[BP)$ in $[CP)$ se sekajo v skupni točki Q.
Pravimo, da sta P in Q *druga drugi izogonalni točki.*

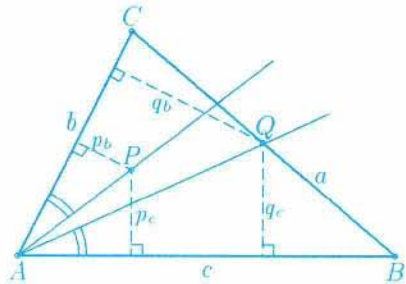


Dokaz: Recimo, da je Q presek izogonal k poltrakoma $[AP)$ in $[BP)$. Potem velja $\frac{p_b}{p_c} = \frac{q_c}{q_b}$, ker je $[AQ)$ izogonala k poltraku $[AP)$, in $\frac{p_c}{p_a} = \frac{q_a}{q_c}$, ker je $[BQ)$ izogonala k $[BP)$. Zmnožimo levi in desni strani teh enačb in dobimo $\frac{p_b}{p_a} = \frac{q_a}{q_b}$. Torej je $[CQ)$ izogonala k $[CP)$, vse tri izogonale se sekajo v Q.

Končno lahko razložimo naslov prispevka:

Definicija: *Lemoinova točka* je težišču trikotnika izogonalna točka.

Pokazali smo že, da vsakemu poltraku pripada točno določeno razmerje razdalj njegovih točk od krakov kota (neodvisno od izbire točke na poltraku). Zato se najprej vprašajmo po tem razmerju, ki ga določa poljubna točka P na izogonali težiščnice. Narišimo težiščnico na stranico a in njeno izogonalo. Zaradi lažjega računanja izberimo na težiščnici točko Q, ki je središče stranice a. Trikotnika $\triangle ABQ$ in $\triangle AQC$ sta ploščinsko enaka, zato je $\frac{1}{2}bq_b = \frac{1}{2}cq_c$ oziroma $\frac{b}{c} = \frac{q_c}{q_b}$ in končno $\frac{p_b}{p_c} = \frac{b}{c}$.

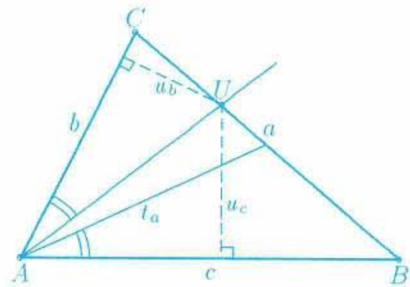


Ugotovili smo torej: razmerje razdalj poljubne točke na izogonali težiščnice trikotnika do nosilk priležnih stranic je enako razmerju dolžin teh dveh stranic.

Trditev 3: Izogonala težiščnice deli stranico trikotnika v razmerju kvadratov dolžin drugih dveh stranic.

Dokaz: Ker imata trikotnika $\triangle BUA$ in $\triangle UCA$ enako dolgi višini na stranici BU oziroma UC (ujemata se z višino na stranico BC v trikotniku $\triangle ABC$), je razmerje $\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}}$ enako razmerju ploščin teh dveh trikotnikov in lahko zapišemo

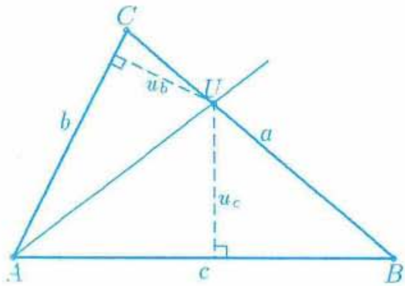
$$\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} = \frac{S_{BUA}}{S_{UCA}} = \frac{\frac{1}{2}cu_c}{\frac{1}{2}bu_b} = \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{u_c}{u_b}\right)$$



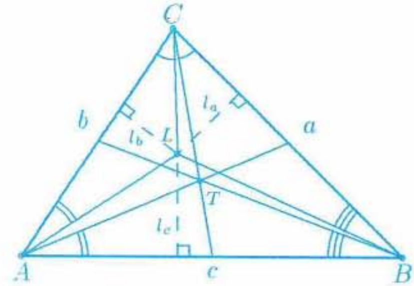
Toda $[AU)$ je izogonala težiščnice, zato je $\frac{u_c}{u_b} = \frac{c}{b}$ in $\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} = \frac{c^2}{b^2}$, kar smo želeli pokazati.

Trditev 4: Lemoinova točka leži na poltraku z začetkom v oglišču trikotnika natanko tedaj, ko je razmerje razdalj od poljubne točke na tem poltraku do nosilk stranic, ki se stikata v tem oglišču, enako razmerju dolžin teh dveh stranic.

Dokaz: Eno smer te trditve smo že dokazali pred trditvijo 3, preostane nam še druga. Vzemimo kar točko U, v kateri poltrak seka stranico trikotnika. Imamo $\frac{u_c}{u_b}=\frac{c}{b}$. Sledi $BU:UC=$ $=\frac{S_{BUA}}{S_{UCA}}=\frac{\frac{1}{2}cu_c}{\frac{1}{2}bu_b}=\frac{c}{b}\cdot\frac{u_c}{u_b}=\frac{c^2}{b^2}$. Seveda samo ena točka na stranici BC deli to stranico v razmerju kvadratov dolžin drugih dveh stranic, zato mora biti po trditvi 3 poltrak $[A,U)$ izogonala težiščnice, na njej pa leži Lemoinova točka.

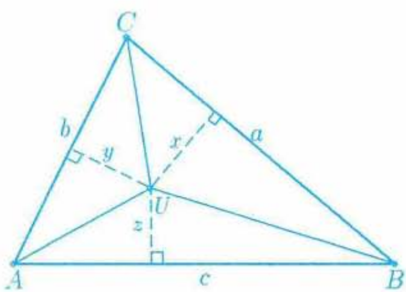


Ker je Lemoinova točka presečišče vseh treh izogonal težiščnic, so njene razdalje do stranic trikotnika sorazmerne dolžinam stranic: $l_a:l_b:l_c=a:b:c$. Obratno seveda tudi velja: če za neko točko L ugotovimo, da so njene oddaljenosti od stranic trikotnika sorazmerne dolžinam stranic, potem je to Lemoinova točka.



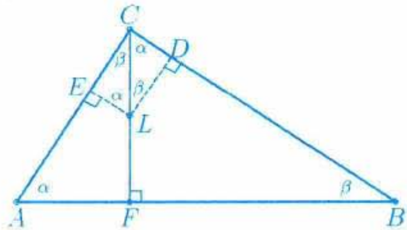
Trditev 5: Lemoinova točka ima med vsemi notranjimi točkami trikotnika najmanjšo vsoto razdalj do trikotnikovih stranic.

Dokaz: Pomagamo si z identiteto $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+$ $+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-$ $-bz)^2+(cx-az)^2$. Naj bodo a, b, c stranice trikotnika, x, y, z pa razdalje notranje točke do trikotnikovih stranic. Pri danem trikotniku sta $a^2+b^2+c^2$ in $ax+by+cz$ konstanti (drugi izraz je enak dvakratni ploščini trikotnika $\triangle ABC$, saj so $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}by$ in $\frac{1}{2}cz$ ploščine trikotnikov $\triangle BCU$, $\triangle CAU$ in $\triangle ABU$). Tako je $x^2+y^2+z^2$ najmanjši, ko so izrazi $bx-ay$, $cy-bz$ in $cx-az$ enaki 0.



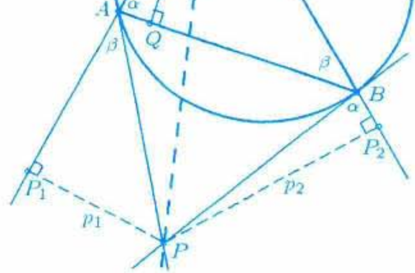
Od tod pa po vrsti dobimo $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$ in $\frac{z}{x} = \frac{c}{a}$. Poltraki $[AU)$, $[BU)$ in $[CU)$ so torej izogonale ustreznih težiščnic, U pa Lemoinova točka.

Trditev 6: Lemoinova točka pravokotnega trikotnika razpolavlja višino na hipotenuzo.



Dokaz:. V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ označimo z L razpolovišče višine na hipotenuzo, z F njeno nožišče ter z D in E pravokotni projekciji točke L na stranici BC oziroma AC. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle LCE$ in $\triangle ABC$ velja $\frac{\overline{LE}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ oziroma $\frac{\overline{LE}}{\overline{LF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, kar pomeni, da je $[AL)$ izogonala težiščnice na BC. Na enak način dobimo, da je $[BL)$ izogonala težiščnice na AC. Torej je L Lemoinova točka.

Trditev 7: Naj bo P presečišče tangent na očrtano krožnico trikotnika skozi dve oglišči. Poltrak z začetkom v tretjem oglišču skozi P je izogonala težiščnice iz tega oglišča.



Dokaz: Naj bo Q nožišče višine na stranico AB. Trikotnika $\triangle AP_1P$ in $\triangle BQC$ sta podobna (enaki koti), zato velja $\frac{p_1}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}}$ ali $p_1 \cdot \overline{BC} = \overline{AP} \cdot \overline{QC}$. Tudi trikotnika $\triangle BP_2P$ in $\triangle AQC$ sta podobna, pa imamo $\frac{p_2}{\overline{BP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{AC}}$ ali $p_2 \cdot \overline{AC} = \overline{BP} \cdot \overline{QC}$. Toda tangentna odseka AP in BP sta enako dolga, zato je $p_1 \cdot \overline{BC} = p_2 \cdot \overline{AC}$ in od tod $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Razmerje razdalj točke P (in zato vsake druge na poltraku