PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 1
Strani 54–59

Jože Grasselli:

POTENČNA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, potence.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1115-Grasselli.pdf

POTENČNA ŠTEVILA

Osnovni izrek aritmetike pravi: vsako od ena večje naravno število je produkt enolično določenih praštevilskih potenc. Za naravno število $n > 1$ obstajajo torej enolično določena praštevila $p_1 < \ldots < p_j$ in naravna števila $e_1, \ldots, e_j$ tako, da je

$$n = p_1^{e_1} \ldots p_j^{e_j}. \tag{1}$$

Zgledi za osnovni izrek: $100 = 2^2.5^2, 162 = 2.3^4, 620 = 2^2.5.31, 289 = = 17^2, 107 = 107$ (število 107 je praštevilo).

Če je v izrazitvi (1) vsak eksponent $e_1, \ldots, e_j$ dve ali več, imenujemo naravno število n **potenčno**. Zgledi potenčnih števil: $200 = 2^3.5^2, 10800 = = 2^4.3^3.5^2, 15125 = 5^3.11^2$, kvadrati, kubi, bikvadrati (četrte potence) od ena večjih naravnih števil.

Ko v zaporedju naravnih števil

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots \tag{2}$$

izpustimo člene, ki niso potenčna števila, ostane zaporedje potenčnih števil

$$4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125, 128, 144, \ldots \tag{3}$$

Zaporedje (3) se nikdar ne neha. Potenčnih števil je namreč neskončno; saj je že kvadratov $2^2, 3^2, 4^2, \ldots$, ki so vsi v (3), neskončno.

Sosednji potenčni števili v (3) sta bolj ali manj oddaljeni. Zanimiv je primer potenčnih števil 8, 9, ki sta obenem zaporedni naravni števili. Ali se v zaporedju (3) še kdaj zgodi, da sta sosednja člena obenem zaporedni naravni števili? Ali se to zgodi velikokrat?

Ker so kvadrati $2^2, 3^2, \ldots$ potenčna števila, poglejmo najprej, ali je med njimi kaj parov zaporednih naravnih števil. Če sta kvadrata $y^2 < x^2$ zaporedni naravni števili, je $x^2 = y^2 + 1$. Od tod sledi $(x - y)(x + y) = 1$. Ker sta faktorja na levi naravni števili in njun produkt 1, je mogoče le $x - y = = 1$, $x + y = 1$ in tako $x = 1, y = 0$. Število $y = 0$ ni naravno, kvadrata $0^0 = 0, 1^2 = 1$ tudi nista potenčni števili. Med kvadrati $2^2, 3^2, \ldots$ torej ni parov, ki jih iščemo. Tako vemo: **če sta sosednji potenčni števili v (3) zaporedni naravni števili, vsaj eno ni kvadrat.**

Če potenčno število ni kvadrat, mora vsebovati v zapisu (1) vsaj en prafaktor v lihi stopnji, večji ali enaki 3. Najbolj preprosto število take oblike je $2^3.y^2 = 8y^2$, kjer je y naravno število. Ali je lahko naslednik števila $8y^2$, tj. $8y^2+1$, kvadrat naravnega števila x? Kadar to drži, je

$$x^2 - 8y^2 = 1. \tag{4}$$

Če dajeta naravni števili x, y rešitev enačbe (4), sta $8y^2, x^2$ potenčni in obenem zaporedni naravni števili. Za $x_0 = 3, y_0 = 1$, ki izpolnjujeta enačbo (4), dobimo ravno par potenčnih števil 8, 9. Iz rešitve $x_0 = 3, y_0 = 1$ pa hitro pridemo do drugih rešitev enačbe (4) v naravnih številih.

Izhajajmo iz obrazcev

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_{n-1} + 8y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{aligned} \quad ; x_0 = 3, y_0 = 1 \tag{5}$$

Ker poznamo x_0, y_0, iz (5) izračunamo

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_0 + 8y_0 = 3.3 + 8.1 = 17 \\ y_1 &= x_0 + 3y_0 = 3 + 3.1 = 6 \end{aligned}$$

Iz znanih $x_1 = 17, y_1 = 6$ po (5) najdemo

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 + 8y_1 = 3.17 + 8.6 = 99 \\ y_2 &= x_1 + 3y_1 = 17 + 3.6 = 35 \end{aligned}$$

Podobno dobimo po obrazcih (5) naprej

$$\begin{array}{lll} x_3 = 577 & x_4 = 3363 & x_5 = 19601 \\ y_3 = 203 & y_4 = 1189 & y_5 = 6930 \end{array}$$

Tako lahko nadaljujemo brez kraja. Po obrazcih (5) je

$$x_n^2 - 8y_n^2 = (3x_{n-1} + 8y_{n-1})^2 - 8(x_{n-1} + 3y_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 - 8y_{n-1}^2$$

in ta povezava velja za vsak indeks $n = 1, 2, \ldots$ Torej je

$$x_n^2 - 8y_n^2 = x_{n-1}^2 - 8y_{n-1}^2 = \ldots = x_1^2 - 8y_1^2 = x_0^2 - 8y_0^2 = 3^2 - 8.1^2 = 1.$$

Vidimo, da vsaki števili x_n, y_n, določeni po obrazcih (5), izpolnjujeta enačbo (4). Zato sta vsaki potenčni števili $8y_n^2, x_n^2$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ zaporedni naravni števili. **Obstaja torej neskončno parov takih potenčnih števil, da sta števili para zaporedni naravni števili.** Ali drugače povedano: **število 1**

se da na neskončno načinov izraziti kot razlika dveh potenčnih števil. Po zgornjem so zgledi za take pare:

$$
\begin{array}{rr}
3^2 - 2^3.1^2 = 1 & 577^2 - 2^3.204^2 = 1 \\
17^2 - 2^3.6^2 = 1 & 3363^2 - 2^3.1189^2 = 1 \\
99^2 - 2^3.35^2 = 1 & 19601^2 - 2^3.6930^2 = 1
\end{array}
$$

Za vsak naraven y je število $3^3.y^2 = 27y^2$ potenčno in ne kvadrat. Če je njegov naslednik kvadrat, je $27y^2 + 1 = x^2$ ali

$$x^2 - 27y^2 = 1. \tag{6}$$

Kakor zgoraj se prepričamo, da je z obrazcema

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_n = 26x_{n-1} + 135y_{n-1} \\
y_n = 5x_{n-1} + 26y_{n-1}
\end{array}
\right. \quad ; x_0 = 26, y_0 = 5 \tag{7}
$$

za $n = 1, 2, \ldots$ določenih neskončno naravnih rešitev enačbe (6) in potenčni števili $27y_n^2, x_n^2$ sta spet zaporedni naravni števili. Ker enačbi (4) in (6) nimata nobene skupne rešitve v naravnih številih, so vsi sedaj dobljeni pari potenčnih števil različni od parov zgoraj. Za $n = 0, 1, 2, 3$ dobimo iz (7) pare potenčnih števil

$$
\begin{array}{rr}
26^2 - 3^3.5^2 = 1 & 70226^2 - 3^3.13515^2 = 1 \\
1351^2 - 3^3.260^2 = 1 & 3650401^2 - 3^3.702520^2 = 1
\end{array} \tag{$*$}
$$

Ugotovili smo, da se v zaporedju (3) potenčnih števil neskončnokrat zgodi, da sta sosednji potenčni števili zaporedni naravni števili. (Z rešitvami (5) in (7) še zdaleč nismo izčrpali vseh takih parov.) Zastavlja se sedaj vprašanje: Ali so v (3) kdaj trije ali morda celo štirje sosednji členi zaporedna naravna števila?

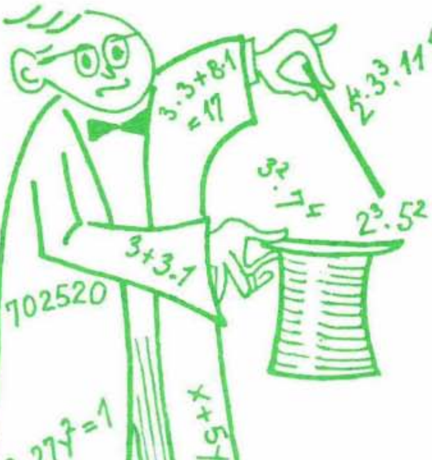
Med štirimi zaporednimi naravnimi števili sta dve števili sodi, dve lihi. Manjše sodo število se zapiše $2^e.l$; tu je e naravno število, l liho število. Sodi števili med zaporednimi štirimi naravnimi števili sta tako

$$2^e l \text{ in } 2^e l + 2. \tag{8}$$

Če je $e = 1$, število $2l$ ni potenčno; v njem je namreč 2 le v prvi stopnji, ker je l liho število. Če je $e \geq 2$, je

$$2^e l + 2 = 2(2^{e-1} l + 1).$$

Število $2^{e-1} l$ je zaradi $e \geq 2$ sodo, zato $2^{e-1} l + 1$ liho; torej nastopa 2 v $2^e l + 2$ samo v prvi stopnji in tako $2^e l + 2$ ni potenčno število. Med številoma (8) je torej zmeraj vsaj eno, ki ni potenčno. To pa pomeni, da **štiri zaporedna naravna števila nikoli niso vsa potenčna**. Tem bolj seveda velja, da pri petih ali več zaporednih naravnih številih nikdar niso vsa potenčna. V zaporedju (3) se tako nikoli ne zgodi, da bi štirje ali več sosednjih členov bili zaporedna naravna števila.



Kako je s tremi zaporednimi naravnimi števili? Med tremi zaporednimi naravnimi števili sta dve sodi in eno liho ali pa eno sodo in dve lihi števili. V prvem primeru sta med tremi števili sodi števili oblike (8). Zanju pa že vemo, da nista nikdar obe potenčni. Če so torej tri zaporedna naravna števila vsa potenčna, morata biti med njima dve lihi in eno sodo število. Piscu teh vrstic ni znano, ali je v zadnjem času kdo našel tri zaporedna naravna števila, ki so vsa potenčna. Do nedavnega niso poznali nobene take trojice. Da takih treh števil ni, tudi ni dokazano. Tako ne vemo, ali v zaporedju (3) nastopajo kdaj trije sodenji členi, ki so obenem zaporedna naravna števila.

Videli smo, da je od dveh zaporednih sodih števil (8) kvečjemu eno potenčno. Zaporedni lihi števili pa sta lahko obe potenčni. Zgled: $5^2 = 25, 3^3 = 27$. Ali je še več primerov, ko sta zaporedni lihi števili obe potenčni?

Pokazali smo že, da ima enačba

$$x^2 - 27y^2 = 1 \tag{6}$$

neskončno rešitev v naravnih številih. Naj bo npr. x', y' taka rešitev, torej

$$x'^2 - 27y'^2 = 1.$$

Napravimo števili

$$\begin{aligned} X &= 5x' + 27y' \\ Y &= x' + 5y' \end{aligned} \tag{9}$$

in izračunajmo

$$27Y^2 - X^2 = 27(x' + 5y')^2 - (5x' + 27y')^2 = 2(x'^2 - 27y'2) = 2.1 = 2.$$

Vsaki rešitvi x', y' enačbe (6) v naravnih številih pripadata torej po (9) določeni naravni števili X, Y, ki ustrezata enačbi

$$27Y^2 - X^2 = 2. \tag{10}$$

Ker ima enačba (6) neskončno naravnih rešitev, ima tudi enačba (10) neskončno naravnih rešitev in potenčni števili $X^2, 27Y^2$ sta zaporedni lihi števili. Torej **obstaja neskončno parov zaporednih lihih števil, ko sta obe števili para potenčni.** Ali drugače povedano: **število 2 se da na neskončno načinov zapisati kot razlika dveh potenčnih števil.**

Napravimo nekaj zgledov. Iz (*) preberemo štiri rešitve za enačbo (6). Pri rešitvi $x' = 26, y' = 5$ dobimo po obrazcih (9)

$$\begin{aligned} X &= 5.26 + 27.5 = 265 \\ Y &= 26 + 5.5 = 51 \end{aligned}$$

in torej

$$3^3.51^2 - 265^2 = 2.$$

Rešitev $x' = 1351, y' = 260$ iz (*) daje po obrazcih (9)

$$\begin{aligned} X &= 5.1351 + 27.260 = 13775 \\ Y &= 1351 + 5.260 = 2651 \end{aligned}$$