PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 5
Strani 268–275

Boris Lavrič:

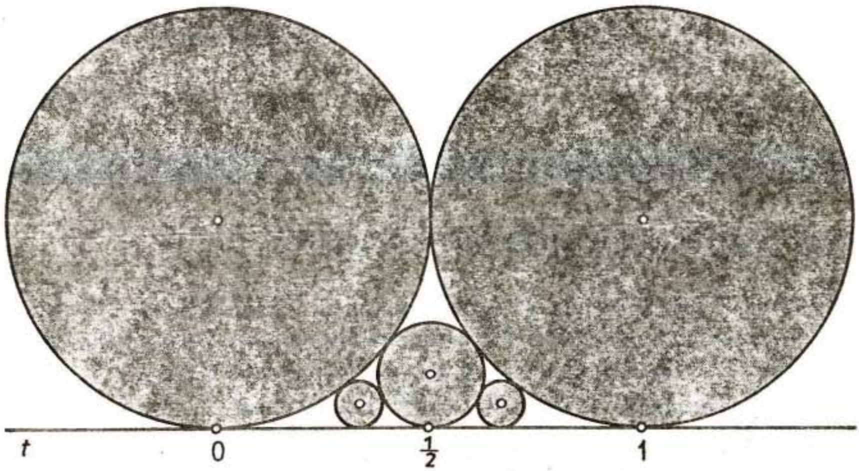
FORDOVI KROGI

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1097-Lavric.pdf

FORDOVI KROGI

Na ravnini ležita dva enako velika kroga in se dotikata. To naj bosta prva dva iz družine *Fordovih krogov*, ki jo bomo zdaj zgradili. Skupno tangento t obeh krogov opremimo s koordinatnim sestavom tako, da se je eden od krogov dotika v točki 0, drugi pa v 1 (točke na t istovetimo z realnimi števili). Tretji član družine je krog, ki se dotika prvih dveh in tangente t, seveda v točki $\frac{1}{2}$. Nadaljujmo podobno. Vsakemu paru pridelanih Fordovih krogov $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki se dotikata, dodajmo nov krog $\mathcal{K}$, ki se dotika obeh in še premice t. Tako dobimo družino vseh Fordovih krogov.



Slika 1. Največjih pet Fordovih krogov

Naloga 1. *Kako načrtamo krog $\mathcal{K}$, če imamo dana kroga $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ in tangento t?*

Na opisani način postopoma pridemo do vsakega Fordovega kroga, vendar moramo pri tem poznati njegove predhodnike. Seveda je to precejšnja ovira, zato bi se ji radi ognili in neposredno spoznali vse kroge. Pa se lotimo te naloge:

Dva podatka bosta dovolj za Fordov krog: njegov polmer in dotikališče s premico t. Določili ju bomo v nekaj korakih.

Najprej si oglejmo naslednji splošnejši položaj in ga v obliki naloge postavimo bralcu.

Naloga 2. *Kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s polmeroma r_1 oziroma r_2 se dotikata skupne tangente t zaporedoma v točkah T_1 in T_2. Obeh se dotika tretji krog $\mathcal{K}$ s polmerom r, ki ima dotikališče T s tangento t med točkama T_1 in T_2. Izrazi z r_1 in r_2 polmer r in razdalje $d = |T_1T_2|$, $d_1 = |T_1T|$ in $d_2 = |T_2T|$.*

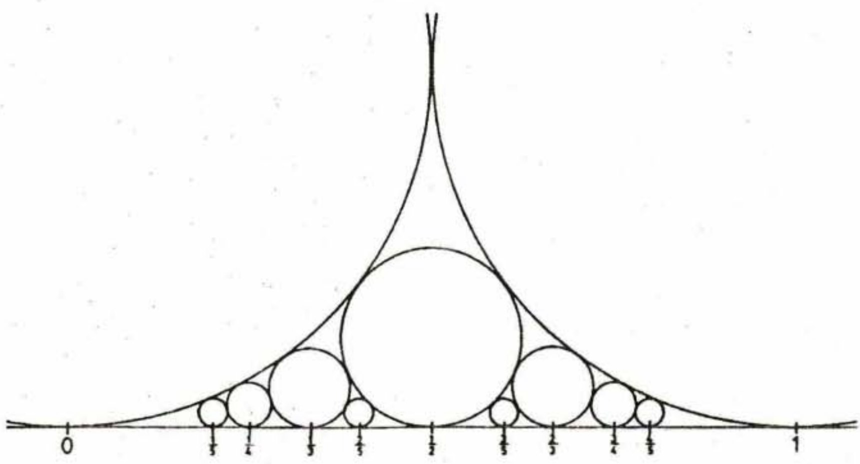
Rešitev naloge najdete v naslednji številki, rezultate pa (skoraj v celoti) razgrnimo kar tu, saj jih bomo takoj potrebovali. Dobimo

$$d = 2\sqrt{r_1 r_2},\ d_1 = 2\sqrt{r_1 r},\ d_2 = 2\sqrt{r_2 r} \tag{1}$$

in od tod še

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}. \tag{2}$$

Uporabimo zdaj te formule za izračun polmerov in dotikališč (s tangento t) nekaterih največjih Fordovih krogov. Prva dva imata polmera $\frac{1}{2}$, dotikališči pa v točkah 0 in 1. Tretji se dotika t v točki $\frac{1}{2}$, njegov polmer pa je po formuli (2) enak $\frac{1}{8}$. Naslednja dva sta očitno enako velika. Z uporabo (2) dobimo njuna polmera $\frac{1}{18}$, s pomočjo (1) pa dotikališči $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$. Zabeležimo še podatke nadaljnjih šestih Fordovih krogov. Dva imata polmer $\frac{1}{32}$, štirje pa $\frac{1}{50}$. Njihova dotikališča so v točkah $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ter $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ in $\frac{4}{5}$. Kaj opazimo ?



Slika 2.

Polmeri vseh naštetih krogov so oblike $\frac{1}{2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, ustrezna dotikališča s t pa so okrajšani ulomki oblike $\frac{m}{n}$ z intervala $[0,1]$. Navedeni primeri to potrjujejo za največje Fordove kroge, zato brž zaslutimo, da je podobno z vsemi Fordovimi krogi. To obetavno slutnjo oblikujmo v

Izrek 1. *Za vsak Fordov krog obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je polmer kroga enak $\frac{1}{2n^2}$, njegovo dotikališče s t pa je okrajšani ulomek oblike $\frac{m}{n}$ z intervala* $[0,1]$.

Bralca vabimo, da se prepriča o pravilnosti naslednjega kriterija, ki ga bomo uporabili pri dokazu izreka 1.

Naloga 3. *Naj se Fordova kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s polmeroma*

$$r_1 = \frac{1}{2n_1^2} \; in \; r_2 = \frac{1}{2n_2^2}, \; (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$$

dotikata premice t zaporedoma v točkah-ulomkih

$$\frac{m_1}{n_1} \; in \; \frac{m_2}{n_2}, \; (\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}).$$

Dokaži, da se $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ dotikata med sabo natanko takrat, kadar velja

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1. \tag{3}$$

Rešitev naloge preberite v naslednji številki, mi pa začnimo z dokazom izreka:

Krogoma $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ iz gornje naloge pridružimo krog $\mathcal{K}$ tako kot v drugi nalogi in izračunajmo njegov polmer r ter dotikališče x s premico t.

Formula (2) nam da polmer

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} = \frac{\frac{1}{2n_1^2}\frac{1}{2n_2^2}}{(\frac{1}{n_1\sqrt{2}} + \frac{1}{n_2\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{2(n_1 + n_2)^2}.$$

Od tod s pomočjo formule (1) po kratkem računu dobimo dotikališče

$$x = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r} = \frac{m_1 n_1 + m_1 n_2 + 1}{n_1(n_1 + n_2)}.$$

Zveza (3) nam x še poenostavi:

$$x = \frac{m_1 n_1 + m_1 n_2 + (m_2 n_1 - m_1 n_2)}{n_1(n_1 + n_2)} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

Postavimo

$$m = m_1 + m_2, \ n = n_1 + n_2$$

in se prepričajmo, da so dotikališča $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ in $\frac{m}{n}$ vseh treh krogov okrajšani ulomki. Res, za prva dva to sledi iz zveze (3) (Zakaj?). Ta nam da še enakost

$$mn_1 - m_1 n = m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1,$$

ki pove, da je tudi tretji ulomek okrajšan. Krog $\mathcal{K}$ ima potemtakem polmer $\frac{1}{2n^2}$ in se dotika premice t v okrajšanem ulomku $\frac{m}{n}$.

Spomnimo se le še na postopek, s katerim pridobivamo Fordove kroge, in dokaz izreka je sklenjen.

Ponovno si oglejmo največje Fordove kroge in razvrstimo po vrsti dotikališča s premico t za vse tiste, katerih polmeri ne presegajo $\frac{1}{50}$:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Dobili smo naraščajoče zaporedje vseh okrajšanih ulomkov z intervala $[0,1]$, katerih imenovalci ne presegajo 5. Ker sta sosednja ulomka $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$ v tem zaporedju dotikališči takih Fordovih krogov, ki se dotikata tudi med sabo, velja zveza (3). Spet se ne moremo upreti skušnjavi posploševanja.

Najprej se ozrimo na splošna zaporedja ulomkov zgornjega tipa. Imenujemo jih *Fareyeva*[1] zaporedja. Natančneje:

Fareyevo zaporedje $\mathcal{F}_k$ reda k je naraščajoče zaporedje vseh okrajšanih ulomkov z intervala $[0,1]$, katerih imenovalci niso večji od k.

Ulomek $\frac{m}{n}$ je torej v $\mathcal{F}_k$ natanko takrat, kadar velja $0 \leq m \leq n \leq k$ in sta števili m, n tuji (pri tem pa je število 0 tuje le številu 1). Prej smo torej zapisali Fareyevo zaporedje $\mathcal{F}_5$, ki nas je pripeljalo k naslednji domnevi. Ker

[1] Ime ni upravičeno: *Farey* je namreč leta 1816 le omenil ta zaporedja in brez dokaza zapisal njihovo lastnost iz naloge 4, *Haros* pa je zaporedja obravnaval že leta 1802 in tudi dokazal lastnosti iz izreka 2 in naloge 4.

bomo videli, da je pravilna, jo strnimo v

Izrek 2. *Zaporedna člena $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$, ($\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$) Fareyevega zaporedja F_k ustrezata pogoju $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$.*

Dokaz bomo oprli na dobro znani rezultat, ki pa ga kljub temu kot nalogo postavimo bralcu.

Naloga 4. *Dokaži, da za vsak par tujih celih števil m, n obstajata celi števili x, y, ki rešita enačbo $nx - my = 1$.*

Zdaj pa k dokazu izreka 2. Ulomek $\frac{m_1}{n_1}$ je okrajšan, zato sta števili m_1 in n_1 tuji. Izberimo celi števili x_1 in y_1 tako, da velja

$$n_1 x_1 - m_1 y_1 = 1.$$

Postavimo

$$x = x_1 + p m_1, \quad y = y_1 + p n_1,$$

kjer smo $p \in \mathbf{Z}$ izbrali tako, da velja ocena

$$k - n_1 < y \leq k. \tag{4}$$

(Zakaj je to možno?) Potem je

$$n_1 x - m_1 y = 1,$$

števili x in y sta tuji, zaradi $n_1 \leq k$ in ocene (4) pa velja $0 \leq k - n_1 < y \leq k$. Od tod sledi, da je

$$\frac{x}{y} \in \mathcal{F}_k \;\; in \;\; \frac{x}{y} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 y} > 0. \tag{5}$$

Pokažimo, da velja

$$x = m_2, \quad y = n_2.$$

Če to ni res, je

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} < \frac{x}{y}$$

in zato

$$\frac{x}{y} - \frac{m_2}{n_2} \geq \frac{1}{n_2 y}, \quad \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} \geq \frac{1}{n_1 n_2}.$$

Seštejmo obe neenakosti in upoštevajmo oceno (4), pa dobimo

$$\frac{x}{y} - \frac{m_1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2 y} + \frac{1}{n_1 n_2} =$$

$$= \frac{n_1 + y}{n_1 n_2 y} > \frac{k}{n_1 n_2 y} \geq \frac{1}{n_1 y}.$$

Prišli smo v protislovje s (5), torej res velja $x = m_2$ in $y = n_2$. Dokaz izreka je s tem sklenjen, saj je

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = n_1 x - m_1 y = 1.$$

Posledica. *Sosednja člena Fareyevega zaporedja $\mathcal{F}_k$ z indeksom $k > 1$ imata različna imenovalca.*

Dokaz. Enakost, ki ji zadoščata sosednja člena Fareyevega zaporedja $\mathcal{F}_k$, pove, da sta njuna imenovalca tuja in zato pri $k > 1$ različna.

Eno od zanimivih lastnosti Fareyevih zaporedij razkriva naslednja naloga, ki jo bo s pomočjo izreka 1 lahko ugnati:

Naloga 5. *Naj bodo $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ in $\frac{m_3}{n_3}$ zaporedni členi nekega Fareyevega zaporedja. Potem velja*

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 + m_3}{n_1 + n_3}.$$

Vrnimo se zdaj k Fordovim krogom. Vemo, da se vsak dotakne premice t v racionalni točki (ulomku) z intervala $[0,1]$. Ali velja tudi obratno: Vsaka racionalna točka z intervala $[0,1]$ na premici t je dotikališče Fordovega kroga? Odgovor je pritrdilen in ga vključimo v

Izrek 3. *Dotikališča Fordovih krogov so natanko vse racionalne točke intervala $[0,1]$ na premici t.*

Zaradi izreka 1 zadošča dokazati, da je vsak okrajšani ulomek $\frac{m}{n}$ z intervala $[0,1]$ dotikališče enega od Fordovih krogov. Dokazovali bomo s pomočjo matematične indukcije po n:

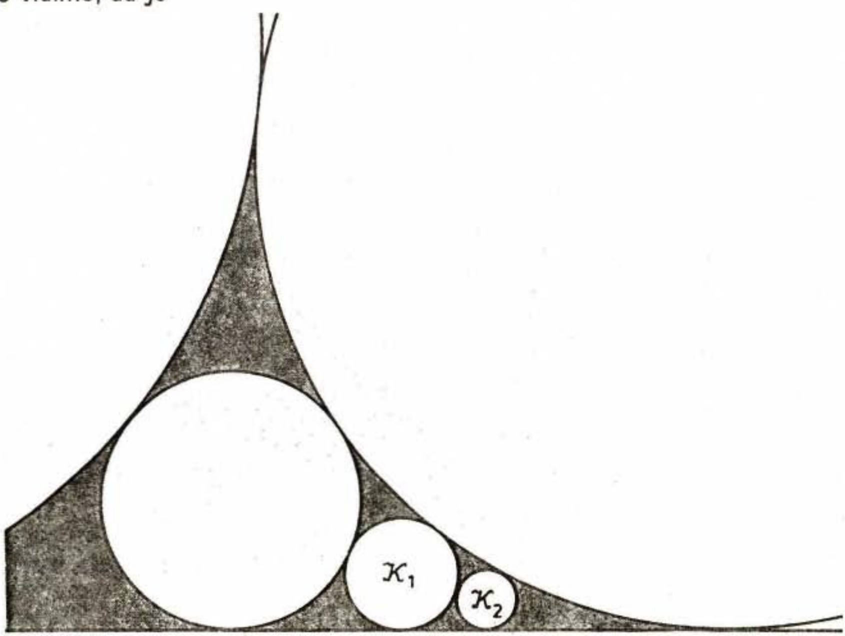
Ulomkov $\frac{0}{1}$ in $\frac{1}{1}$ se dotikata največja Fordova kroga, torej pri $n = 1$ trditev drži.

Naj bo zdaj k poljubno naravno število, večje od 1. Predpostavimo, da trditev velja za $n = k - 1$, in dokažimo, da potem velja tudi za $n = k$.

Naj bo $\frac{j}{k}$ poljuben okrajšani ulomek z intervala [0,1]. Seveda je $\frac{j}{k}$ člen Fareyevega zaporedja $\mathcal{F}_k$, različen od 0 in 1. Njegova soseda

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \; (\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2})$$

v $\mathcal{F}_k$ imata po posledici izreka 2 imenovalca manjša od k, zato sta sosednja člena Fareyevega zaporedja $\mathcal{F}_{k-1}$. Po izreku 2 je tedaj $m_2 n_1 - m_1 n_2 = = 1$, zaradi naše predpostavke pa obstajata Fordova kroga $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki se zaporedoma dotikata t v točkah $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$. Naloga 3 pove, da se $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ dotikata med sabo. Iz dokaza izreka 1 zvemo, da se potem Fordov krog $\mathcal{K}$, ki se dotika $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, dotakne premice t v točki $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$. Z uporabo naloge 5 vidimo, da je



Slika 3.