PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 2
Strani 66–71

Boris Lavrič:

IZMERIMO SVITEK

Ključne besede: matematika, kolobarji.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1083-Lavric.pdf

IZMERIMO SVITEK

Za začetek na kratko povzemimo, kaj o svitku pravi Slovar slovenskega knjižnega jezika :

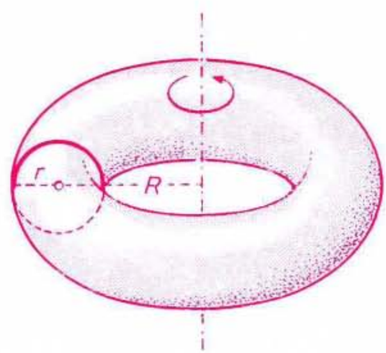
Svitek je obročasta, spletena ali iz blaga narejena priprava za lažje prenašanje bremena na glavi, pa tudi tisto, kar je po obliki podobno tej pripravi (na primer napihnjena avtomobilska pnevmatika).

Matematični opis svitka mora biti seveda natančnejši. Pa si ga oglejmo:

Svitek ali *torus* je vrtenina, ki nastane, kadar sučemo krog okrog premice, ki leži v ravnini tega kroga in ga ne seka.

S pomočjo te definicije lahko preprosto izmerimo velikost svitka. Dva podatka zadoščata: polmer kroga, ki ga sučemo, in oddaljenost njegovega središča od osi vrtenja. Polmer kroga bomo označevali z r, oddaljenost središča od osi pa z R.

S tema podatkoma bomo izrazili prostornino in površino svitka.



Slika 1

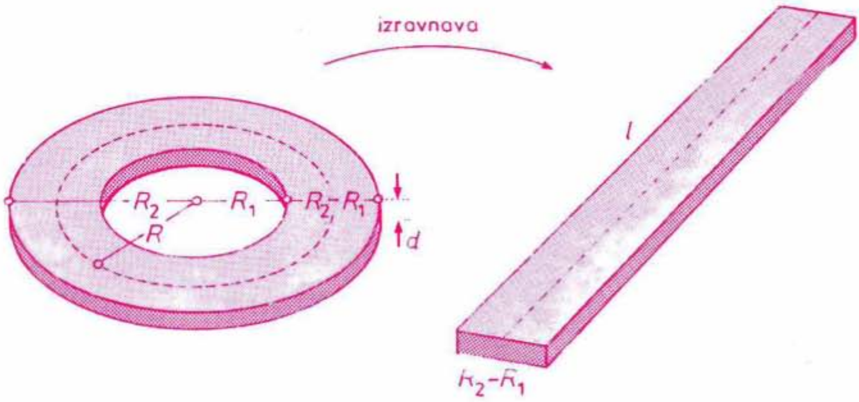
1. Prostornina

Najprej se lotimo kolobarjaste plošče. Krožni kolobar z notranjim polmerom R_1 in z zunanjim polmerom R_2 odebelimo v kolobarjasto ploščo debeline d. Širina te plošče tedaj meri $R_2 - R_1$. Nato ploščo izravnajmo v enako debelo in široko pravokotno ploščo z isto prostornino (glej sliko 2). Poiščimo zdaj njeno dolžino l. Izenačimo prostornini prvotne in izravnane plošče

$$\pi(R_2^2 - R_1^2)\, d = (R_2 - R_1)\, d\, l$$

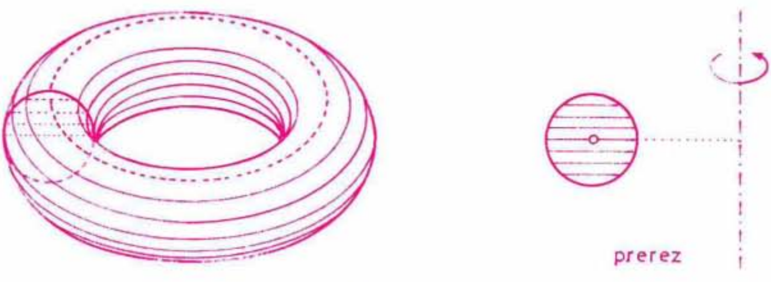
in že dobimo $l = \pi(R_1 + R_2)$. Torej je l natančno obseg kroga, ki teče po sredi kolobarja, saj ima le-ta polmer R enak

$$R = R_1 + (R_2 - R_1)/2 = (R_1 + R_2)/2.$$



Slika 2

Zdaj pa svitek razrežimo na kolobarjaste rezine z ravninami, ki so pravokotne na njegovo os. Ena od teh ravnin naj razpolovi svitek, rezine pa naj bodo enako debele.



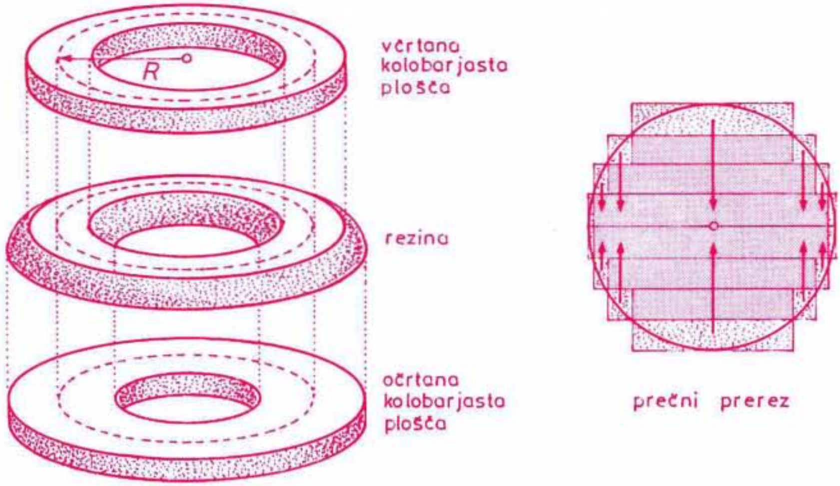
Slika 3.

V vsako rezino včrtajmo največjo kolobarjasto ploščo, ki je vsebovana v tej rezini, nato pa še očrtajmo rezini najmanjšo kolobarjasto ploščo, ki rezino vsebuje (glej sliko 4).

Seveda je vsota V_1 prostornin včrtanih plošč manjša od prostornine V svitka, ta pa manjša od vsote V_2 prostornin očrtanih kolobarjastih plošč, torej

$$V_1 < V < V_2. \qquad (1)$$

Razlika $V_2 - V_1$ je enaka dvakratni prostornini največje očrtane kolobarjaste plošče, kar lahko ugotovimo tako, da od očrtanih plošč odvzamemo



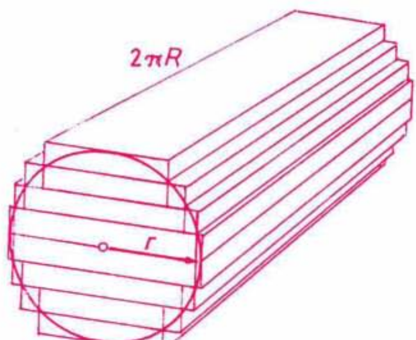
Slika 4.

včrtane in ostanek zložimo kot kaže slika 4 desno. Torej velja

$$V_2 - V_1 = 8\pi R r d, \qquad (2)$$

kjer smo z d označili debelino plošč.

Nadalje opazimo, da imajo vsi krogi, ki tečejo po sredinah kolobarjev z osnovnih ploskev teh plošč, polmer R. Izravnajmo vse plošče hkrati, tako kot smo prej storili z eno samo. Dobimo pravokotne plošče, ki so vse dolge $2\pi R$. Zložimo



Slika 5.

jih, kot kaže slika 5. Plošče, ki so pri izravnavi nastale iz včrtanih, so zdaj vsebovane v valju, visokem $2\pi R$, katerega osnovna ploskev je krog s polmerom r, izravnane očrtane plošče pa ta valj vsebujejo. Prostornina valja meri $(\pi r^2) 2\pi R$, zato velja

$$V_1 < 2\pi^2 r^2 R < V_2. \qquad (3)$$

Če svitek narežemo na dovolj tanke rezine, je razlika $V_2 - V_1$ zaradi (2) majhna kot le želimo, torej iz (1) in (3) sledi iskana formula za prostornino svitka

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

2. Površina

Narežimo svitek na rezine, kot smo to storili pri računanju njegove prostornine. Površje svitka sestavljajo plašči teh rezin. Vsak je sestavljen iz dveh delov, ki ju dobimo s sukanjem ustreznih krožnih lokov na krožnici s polmerom r (glej sliko 6).

Slika 6.

Namesto teh lokov zasukajmo tetivi, ki jima pripadata. Tako dobimo plašča dveh prisekanih stožcev. Poglejmo na sliko 7 in po formuli izračunajmo njuni površini pl_n in pl_z.

$$pl_n = \pi s((R-a)+(R-b)) = \pi s(2R-(a+b))$$

$$pl_z = \pi s((R+a)+(R+b)) = \pi s(2R+(a+b)).$$

Vsota obeh je torej enaka

$$pl = pl_n + pl_z = 4\pi Rs,$$

kjer je s dolžina tetiv, ki smo ju sukali. Zdaj seštejmo površine plaščev vseh obravnavanih prisekanih stožcev. Dobimo z $2\pi R$ pomnožen obseg večkotnika, ki ga sestavljajo vse tetive. Če rezine tanjšamo, se obseg večkotnika bliža obsegu kroga s polmerom r, vsota površin plaščev prisekanih stožcev pa iskani površini svitka. Torej za površino P svitka velja formula

$$P = 4\pi^2 Rr.$$

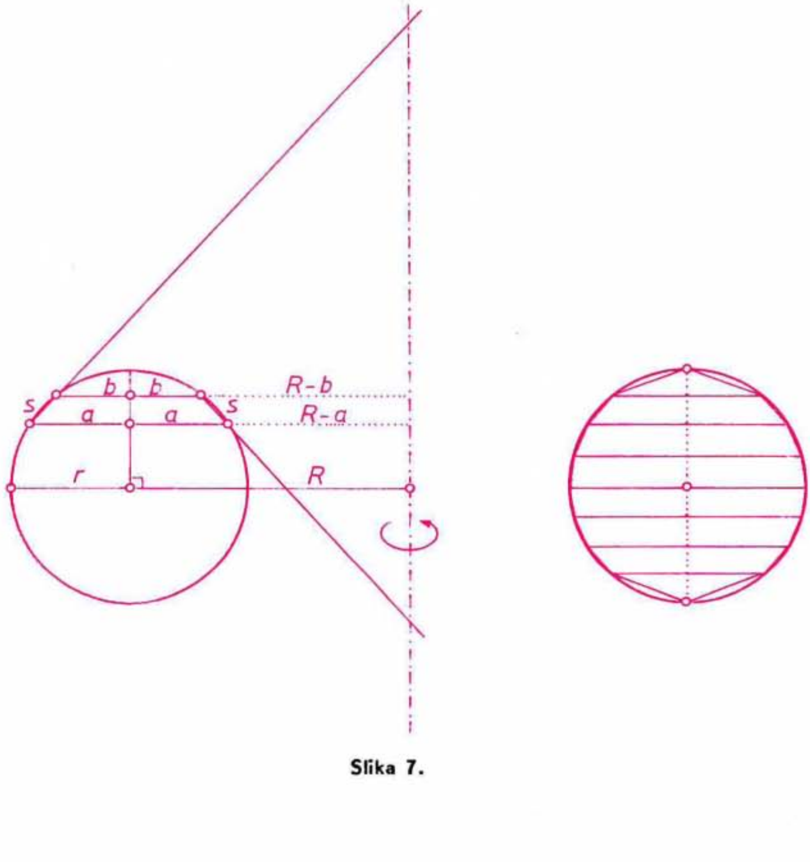
Pravkar dobljeni obrazec lahko utemeljimo še drugače. Na površje svitka s podatkoma R in r nanesimo enakomeren sloj debeline d, tako da vrh sloja tvori nov svitek z enakim R, namesto r pa je sedaj $r+d$. Prostornina V_d dodanega sloja potem po formuli za prostornino svitka meri

$$V_d = 2\pi^2 R(r+d)^2 - 2\pi^2 Rr^2 = 2\pi^2 R(2r+d)d.$$

Ker površje svitka ni preveč nagubano, je pri zelo tankem sloju (torej pri majhnem $d > 0$) njegova površina približno enaka z d pomnoženi površini P prvotnega svitka: $V_d \doteq Pd$. Od tod dobimo

$$P \doteq 2\pi^2 R(2r+d),$$

s tanjšanjem debeline d pa brž dobimo enakost $P = 4\pi^2 Rr$, ki smo jo želeli utemeljiti.



Slika 7.

Za konec postavimo bralcu še nekaj nalog :

1. Bi bila dobra tudi naslednja definicija svitka: Svitek (s podatkoma R in r) je množica točk, ki so največ r oddaljene od dane krožnice s polmerom R.

2. Kakšen mora biti svitek, da obstaja po površini enak svitek z dvakrat večjo prostornino ?

3. Osnosimetričen ravninski lik s ploščino p in z obsegom o zasučemo okrog premice, ki je vzporedna simetrijski osi lika, leži v njegovi ravnini in ga ne seka. Kolikšni sta prostornina in površina nastale vrtenine ?

Boris Lavrič