PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 1
Strani 18–20

Marija Vencelj:

KOMBINATORNO PRAVILNA TELESA

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1075-Vencelj-telo.pdf

KOMBINATORNO PRAVILNA TELESA

Pravilno telo je konveksen polieder, katerega *stranske ploskve* so sami *skladni pravilni večktoniki*, ki v ogliščih oblikujejo *skladne prostorske kote*. Mednje očitno sodita pravilni *tetraeder* in *kocka*, pa tudi pravilni *oktaeder*, *dodekaeder* in *ikozaeder*, katerih skice si lahko ogledate na začetku članka *V. Domanjka Platonovi poliedri* v tej številki Preseka. V omenjenem članku boste v zvezi z njimi našli tudi marsikatero zgodovinsko zanimivost.

Že stari Grki so vedeli, da poleg navedenih petih poliedrov drugih pravilnih teles ni. Oglejmo si dokaz te trditve!

- - -

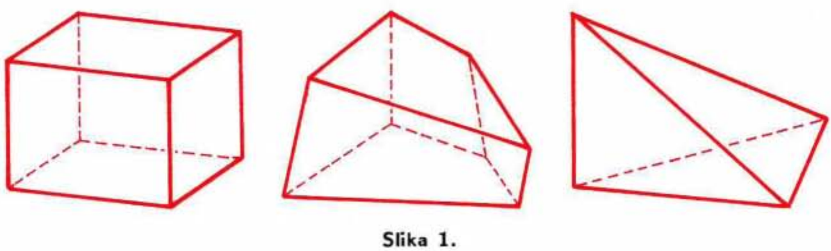
S konveksnimi poliedri smo se srečali že v članku *Eulerjeva poliedrska formula* v tej številki Preseka. Tam smo pokazali, da za vsak konveksen polieder velja zveza

$$V - R + S = 2 \tag{1}$$

kjer je V število oglišč, R število robov in S število stranskih ploskev poliedra.

Iz posameznega oglišča poliedra izhaja končno mnogo robov. Njihovo število imenujemo *red oglišča* poliedra.

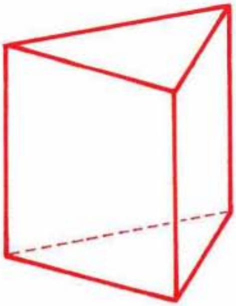
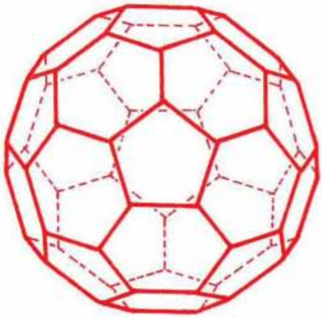
Definicija. *Kombinatorno pravilno telo tipa (m, n) je konveksen polieder, katerega stranske ploskve so sami m-kotniki, vsa oglišča pa imajo red n.*



Slika 1.

Na sliki 1 je nekaj kombinatorno pravilnih teles, pokončna tristrana prizma in nogometni žogi podoben polieder na sliki 2 pa nista kombinatorno pravilni telesi. Med kombinatorno pravilna telesa sodijo očitno tudi vsi pravilni poliedri.

Števili m in n sta seveda enaki najmanj 3, vendar to ni edina omejitev. Različnih tipov kombinatorno pravilnih teles je namerč presenetljivo malo. Velja:

Slika 2.

Izrek. *Obstaja natanko pet različnih tipov kombinatorno pravilnih teles. To so tipi* $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$ *in* $(3,5)$.

Dokaz. Naj bo X poljuben kombinatorno pravilen polieder tipa (m, n). Kot običajno označimo z V, R in S število njegovih oglišč, robov in stranskih ploskev.

Ker iz vsakega oglišča izhaja n robov in ima vsak rob dve oglišči, velja

$$2R = nV$$

Nadalje ima vsaka stranska ploskev m robov in posamezen rob pripada dvema stranskima ploskvama. Zato velja

$$2R = mS$$

Vstavimo

$$V = 2R/n \quad \text{in} \quad S = 2R/m$$

v Eulerjevo poliedrsko formulo (1). Dobimo

$$(2/n - 1 + 2/m)R = 2$$

od koder sledi

$$R = 2mn/(2m + 2n - mn)$$

Število robov R je seveda pozitivno število. Torej mora biti

$$2m + 2n - mn > 0$$