

# **PRESEK**

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652

Letnik **19** (1991/1992)

Številka 1

Strani 46-49

Dragoljub M. Milošević, prevedel in priredil Mirko Dobovišek:

## **O KOLINEARNOSTI TREH TOČK**

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/19/1075-Milosevic-Dobovisek.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## O KOLINEARNOSTI TREH TOČK

Učenci se že zelo zgodaj srečajo s pojmom kolinearnosti. Če točke ležijo na isti premici, rečemo, da so kolinearne. Namen tega sestavka je, pokazati, kako kolinearnost lahko opišemo s pomočjo vektorjev. Najprej bomo povedali, kdaj so tri točke kolinearne, nato pa bomo trditve uporabili v dveh zanimivih primerih. Vektor od točke  $A$  do točke  $B$  označimo z  $\overrightarrow{AB}$ , dolžino tega vektorja (dolžino daljice med  $A$  in  $B$ ) pa z  $\overline{AB}$ .

**Trditev.** Če so  $A$ ,  $B$  in  $C$  tri kolinearne točke,  $A \neq C$  in  $O$  poljubna točka, potem obstaja realno število  $k$ , da velja:

$$\overrightarrow{OB} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \quad (*)$$

Če je  $0 \leq k \leq 1$ , je točka  $B$  na daljici  $AC$ .

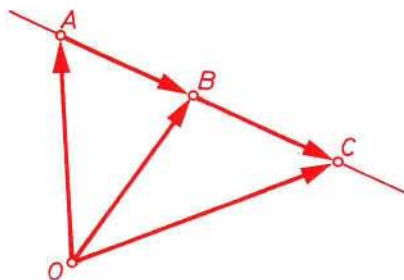
**Dokaz.** Naj bodo točke  $A$ ,  $B$  in  $C$  na isti premici (slika 1). Ker sta vektorja  $\overrightarrow{AB}$  in  $\overrightarrow{AC}$  vzporedna, je  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ . Ker je  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  in  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ , je  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ . Izračunajmo  $\overrightarrow{OB}$ . Dobimo:

$$\overrightarrow{OB} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC},$$

kar smo hoteli dokazati.

S pomočjo zgornje trditve rešimo dve nalogi.

**Naloga 1.** Na straneh  $AB$ ,  $BC$  in  $CA$  trikotnika  $ABC$  ležijo tri točke  $D$ ,  $E$  in  $F$  tako, da je  $\overrightarrow{AD} = (1/3)\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BE} = (1/3)\overrightarrow{BC}$  in  $\overrightarrow{CF} = (1/3)\overrightarrow{CA}$ . Z  $M$ ,  $N$  in  $P$  označimo zaporedoma preseke daljic  $CD$  in  $AE$ ,  $BF$  in  $AE$  ter  $CD$  in  $BF$  (slika 2). Dokaži, da je ploščina  $p(MNP)$  trikotnika  $MNP$  sedmina ploščine trikotnika  $ABC$ .

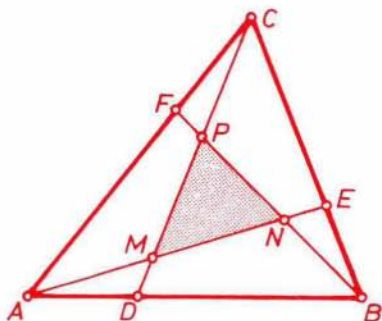


Slika 1

**Rešitev.** Trikotnika  $ABC$  in  $ABE$  imata skupno višino, ki izhaja iz oglišča  $A$ . Ker je  $\overline{BE} : \overline{BC} = 1 : 3$ , je

$$p(ABE) = \frac{1}{3}p(ABC) \quad (1)$$

Ker točka  $N$  leži na daljicah  $AE$  in  $BF$ , torej na premici skozi točki  $A$  in  $E$  ter na premici skozi točki  $B$  in  $F$ , iz naše trditve sledi, da obstajata števili  $m$  in  $n$ , za kateri velja:



Slika 2

$$\overline{CN} = (1 - m)\frac{2}{3}\overline{CB} + m\overline{CA} \quad \text{in} \quad \overline{CN} = (1 - n)\overline{CB} + n\frac{1}{3}\overline{CA}$$

Če zgornja dva izraza za  $\overline{CN}$  izenačimo ter vse prenesemo na levo stran, dobimo:

$$(m - \frac{n}{3})\overline{CA} + (n - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3})\overline{CB} = 0$$

Ker  $A$ ,  $B$  in  $C$  ne ležijo na isti premici, ta enakost lahko velja le, če je

$$m - \frac{n}{3} = 0 \quad \text{in} \quad n - \frac{2m}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Sledi  $m = 1/7$  in  $n = 3/7$ . Zato je

$$\overline{CN} = \frac{6}{7}(\frac{2}{3}\overline{CB}) + \frac{1}{7}\overline{CA} = \frac{6}{7}\overline{CE} + \frac{1}{7}\overline{CA}$$

Ker je

$$\overline{AN} = \overline{CN} - \overline{CA} = \frac{6}{7}\overline{CE} + \frac{1}{7}\overline{CA} - \overline{CA} = \frac{6}{7}(\overline{CE} - \overline{CA}) = \frac{6}{7}\overline{AE}$$

je  $\overline{AN} : \overline{AE} = 6 : 7$ .

Trikotnika  $ABN$  in  $ABE$  imata skupno višino (iz oglišča  $B$ ). Zato je

$$p(ABN) = \frac{6}{7}p(ABE) \quad (2)$$

Iz (1) in (2) dobimo

$$p(ABN) = \frac{2}{7}p(ABC)$$

Podobno dobimo

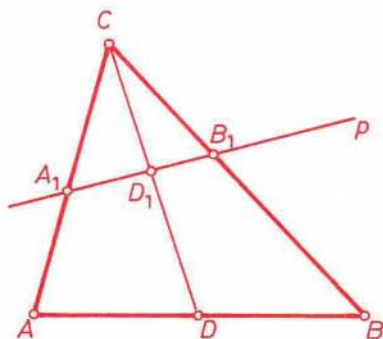
$$p(BPC) = \frac{2}{7}p(ABC) \quad \text{in} \quad p(AMC) = \frac{2}{7}p(ABC)$$

Sedaj pa že lahko izračunamo ploščino trikotnika  $MNP$ .

$$\begin{aligned} p(MNP) &= p(ABC) - (p(ABN) + p(BPC) + p(AMC)) = \\ &= p(ABC) - \frac{6}{7}p(ABC) = \frac{1}{7}p(ABC) \end{aligned}$$

**Naloga 2.** Podan je trikotnik  $ABC$  s težiščnico  $CD$ . Premica  $p$ , ki ne gre skozi nobeno oglišče trikotnika, naj seka daljice  $CA$ ,  $CB$  in  $CD$  v točkah  $A_1$ ,  $B_1$  in  $D_1$  (slika 3). Dokaži, da velja

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA_1}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{CB_1}} = 2 \frac{\overline{CD}}{\overline{CD_1}} \quad (3)$$



Slika 3.

**Rešitev.** Oglejmo si vektorje  $\overrightarrow{CA_1}$ ,  $\overrightarrow{CB_1}$  in  $\overrightarrow{CD_1}$ . Izrazimo jih lahko takole:

$$\overrightarrow{CA_1} = k\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CB_1} = n\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CD_1} = m \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} \quad (4)$$

Enakost (3) sedaj lahko zapišemo tudi takole:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = 2 \frac{1}{m} \quad (5)$$

Za točke  $A_1$ ,  $D_1$  in  $B_1$ , ki so kolinearne, uporabimo (\*).

$$\overrightarrow{CD_1} = (1-p)\overrightarrow{CB_1} + p\overrightarrow{CA_1}$$

