PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 6
Strani 332–334

Marija Vencelj:

KARDANSKI PRENOS

Ključne besede: matematika, mehanika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1068-Vencelj.pdf

KARDANSKI PRENOS

Pojem kardanskega prenosa srečamo v mehaniki, kadar gre za spremembo *krožnega gibanja* v *premo nihanje*.

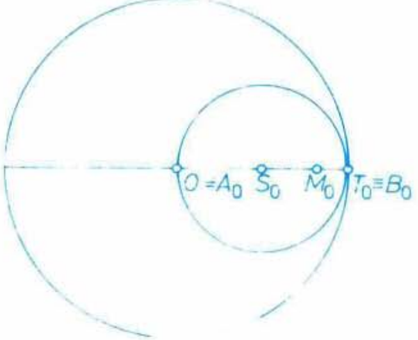
Z matematičnega vidika gre za delni problem naslednje naloge, ki jo je že v 16. stoletju zastavil italijanski matematik *Geronimo Cardano*:

Krog s polmerom r se kotali po notranji strani krožnice s polmerom 2r. Kakšno pot opiše pri tem izbrana točka kroga?

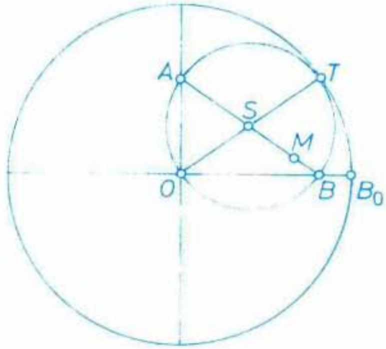
Poskusimo odgovoriti na to vprašanje!

Ker je polmer malega kroga dvakrat manjši od polmera krožnice, po kateri se kotali, se po polnem obhodu vsaka njegova točka vrne v začetni položaj. Nato nadaljuje pot po isti progi kot pri prejšnjem obhodu. Torej moramo poiskati le zaključeno krivuljo, ki jo označena točka opiše, ko se mali krog enkrat zakotali po notranjosti velike krožnice.

Najprej se domenimo za nekaj oznak. Naj bo O središče mirujoče krožnice, S središče kotalečega se kroga in M označena točka, katere tir bomo zasledovali. Nadalje naj bosta A in B krajišči tistega premera malega kroga, ki nosi točko M, ter T dotikališče obeh krogov (slika 2).



Slika 1.



Slika 2.

Začetni položaj izberimo kot na sliki 1, kjer leži točka M na premici skozi središči obeh krogov. Začetne lege posameznih točk smo označili z indeksom nič. Najprej si bomo ogledali, kako se pri kotaljenju spreminja lega premera AB.

Očitno je (slika 2), da sta loka $\widehat{B_0T}$ in $\widehat{BT}$ enako dolga, ker si pri kotaljenju ustrezata. Prvi pripada krožnici s polmerom $2r$, drugi krožnici s polmerom r. Za ustrezna središča kota zato velja

$$\sphericalangle TOB_0 = \frac{1}{2} \sphericalangle TSB \tag{1}$$

Toda središče O velike krožnice leži v vsakem trenutku na robu malega kroga. Za obodni kot z vrhom v O in krakoma skozi T in B zato velja ena od naslednjih zvez s središčnim kotom:

$$\sphericalangle TOB = \frac{1}{2} \sphericalangle TSB$$

ali (ta primer si narišite sami)

$$\sphericalangle TOB = \pi - \frac{1}{2} \sphericalangle TSB$$

Od tod zaradi (1) sledi

$$\sphericalangle TOB = \sphericalangle TOB_0$$

ali

$$\sphericalangle TOB = \pi - \sphericalangle TOB_0$$

Iz obeh zvez sledi isti sklep: točka B leži na premici, ki poteka skozi točko O in skozi B_0, začetno lego točke B. Povejmo to še drugače: Eno krajišče tistega premera kotalečega se kroga, ki nosi označeno točko M, se ves čas kotaljenja giblje vzdolž istega premera velike krožnice, tistega, ki ga določa začetna točka B_0. Očitno opiše ves premer v vsaki smeri po enkrat, ko se mali krog enkrat zakotali po notranjosti velike krožnice (slika 2). To gibanje točke B je v mehaniki uporabljeno kot osnovni princip za pretvorbo krožnega gibanja v premo nihanje.

In kako se pri tem giblje točka A, to je drugo krajišče opazovanega premera? Kot $\sphericalangle AOB$ je kot obodni kot nad premerom AB pravi, torej se točka A giblje ves čas po tistem premeru velike krožnice, ki je pravokoten na premer, po katerem se giblje krajišče B. *Ko se torej krog kotali po notranji strani krožnice z dvakrat večjim polmerom, se premer AB giblje tako, da njegovi krajišči drsita po dveh medsebojno pravokotnih premerih velike krožnice.*