PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 5
Strani 268–274

Janez Strnad:

KOŠ! KOŠ!

Ključne besede: fizika, gibanje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1054-Strnad.pdf

KOŠ! KOŠ!

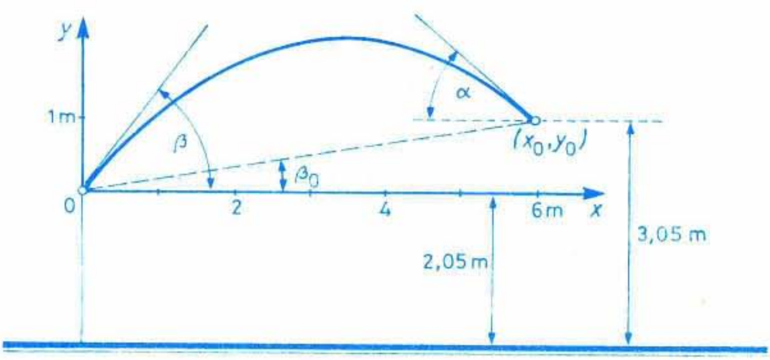
Študenti mestnega koledža v Springfieldu v ameriški zvezni državi Massachusetts so zelo radi igrali ameriški nogomet. Velikokrat pa so se morali zaradi dežja odpovedati priljubljeni igri z žogo. Njihovemu učitelju Jamesu Naismithu je šlo tarnanje študentov zaradi slabega vremena do živega in poskusil jim je ustreči z igro z žogo v dvorani. Pri njej je bilo treba žogo spraviti v visoko postavljena koša za breskve. Pozneje so košema odstranili dno, da ni bilo treba vedno plezati po žogo, in ju vpeli. Tako je bila leta 1891 rojena *košarka*, ki sodi med najbolj priljubljene športne igre. V počastitev stoletnice košarke poenostavljeno opišimo del pomembnega sestavnega dela igre - *meta na koš*. Pri tem shajamo z osnovnimi enačbami za enakomerno in enakomerno pospešeno premo gibanje in trigonometrijo.

Opazujmo gibanje središča žoge v navpični ravnini, ko leti žoga proti košu. Sredina obroča v košu naj bo v točki (x_o, y_o), če zapusti središče žoge metalčevo roko, ko je v izhodišču. Središče žoge se giblje z začetno hitrostjo v pod kotom β proti vodoravnici. Kot med zveznico sredine obroča z izhodiščem in vodoravnico zaznamujmo z β_0 in kot med smerjo hitrosti središča žoge pri letu skozi obroč in vodoravnico z α (slika 1).

Gibanje središča žoge pri *poševnem metu* razstavimo na vodoravno in navpično gibanje. Začetno hitrost razstavimo na vodoravno komponento $v\cos\beta$ in na navpično komponento $v\sin\beta$. Pri vodoravnem gibanju je hitrost konstantna in razdalja narašča sorazmerno s časom:

$$v_x = v\cos\beta \qquad x = vt\cos\beta$$

Slika 1. Met na koš.



Pri navpičnem gibanju je hitrost sestavljena iz konstantnega dela, ki ustreza gibanju z začetno hitrostjo navzgor, in iz dela, ki s časom enakomerno narašča in ustreza prostemu padanju. Razdalja zaradi prvega prispevka narašča sorazmerno s časom, zaradi drugega pa sorazmerno s kvadratom časa, kar je značilno za enakomerno pospešeno gibanje, kakršno je prosto padanje:

$$v_y = v \sin\beta - gt \qquad y = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Pospešek prostega pada ali težni pospešek g meri 9,8 m/s^2. Iz zadnje od prvih dveh enačb izračunamo čas $t = x/v\cos\beta$ in ga vstavimo v zadnjo enačbo:

$$y = x\tan\beta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\beta}$$

Središče žoge se giblje po *paraboli*.

Če gre središče žoge skozi sredino obroča, mora veljati

$$y_o = x_o\tan\beta - \frac{gx_o^2}{2v^2\cos^2\beta} = x_o\tan\beta_0$$

V enačbo smo vključili nazadnje še kot β_0, saj velja $\tan\beta_0 = y_o/x_o$. Delimo jo z x_o in dobimo

$$\tan\beta_0 = \tan\beta - \frac{gx_o}{2v^2\cos^2\beta} \tag{1}$$

Iz enačbe najprej izračunamo $x_o = (2v^2\cos^2\beta/g)(\tan\beta - \tan\beta_0)$ in to zvezo predelamo v

$$x_o = \frac{v^2}{g\cos\beta_0}\left(\sin(2\beta - \beta_0) - \sin\beta_0\right) \tag{2}$$

Pot vodi preko korakov: $x_o = \dfrac{2v^2\cos^2\beta}{g}\left(\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} - \dfrac{\sin\beta_0}{\cos\beta_0}\right) =$

$$= \frac{v^2}{g}\left(2\sin\beta\cos\beta - \frac{2\cos^2\beta\sin\beta_0}{\cos\beta_0}\right) =$$

$$= \frac{v^2}{g\cos\beta_0}(\sin 2\beta\cos\beta_0 - \cos 2\beta\sin\beta_0 - \sin\beta_0)$$

Pri njih uporabimo enačbe sa sinus in kosinus dvojnega kota in za sinus razlike kotov:

$$2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta, \qquad \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \quad \text{in}$$

$$\sin 2\beta\cos\beta_0 - \cos 2\beta\sin\beta_0 = \sin(2\beta - \beta_0)$$

Kot, pod katerim prileti središče žoge skozi obroč, določata komponenti hitrosti v_{x_o} in v_{y_o} v točki (x_o, y_o) takole:

$$\tan\alpha = \frac{-v_{yo}}{v_{xo}} = \frac{-(v\sin\beta - gt)}{v\cos\beta} = -\tan\beta + \frac{g}{v\cos\beta}\frac{x}{v\cos\beta} =$$

$$= -\tan\beta + \frac{gx}{v^2\cos^2\beta}$$

Pri tem smo upoštevali, da je komponenta hitrosti v smeri osi y pri košu negativna in - kot prej - izrazili čas s koordinato x. Z enačbo (1) dobimo drugo pomembno zvezo:

$$\tan\alpha = \tan\beta - 2\tan\beta_0 \tag{3}$$

Zdaj se vprašajmo po najugodnejšem kotu za met. Pri kolikšnem kotu je hitrost pri dani razdalji x_o najmanjša? V enačbi (2) nastopa kot β samo v prvem členu. Sinus ne more biti večji od 1 in doseže to vrednost pri $2\beta - \beta_0 = 90^\circ$, torej je

$$\beta_n = 45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta_0 \tag{4}$$

najugodnejši kot za met. Pri tem kotu preide enačba (2) v

$$x_o = \frac{v^2(1 - \sin\beta_0)}{g\cos\beta_0}$$

Iz nje izračunamo najmanjšo hitrost

$$v = \sqrt{\frac{gx_o\cos\beta_0}{1 - \sin\beta_0}} = \sqrt{\frac{gx_o^2}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2} - y_o}}$$

s katero dosežemo koš iz dane razdalje x_o.

Vzemimo, da meče igralec z meje območja treh točk pri $x_o = 6$ m in je ob metu središče žoge 1 meter pod košem ($y_o = 1$ m). Najprej iz enačbe $\tan\beta_0 = y_o/x_o = \frac{1}{6}$ izračunamo kot $\beta_0 = 9.5°$ in nato iz enačbe (4) najugodnejši kot $\beta = 45° + \frac{1}{2}\cdot 9,5° = 55°$. Zadnja enačba da za hitrost pri najugodnejšem kotu

$$v = \sqrt{\frac{9,8\ \mathrm{ms}^{-2}\cdot 6\ \mathrm{m}\cdot\cos 9,5°}{1-\sin 9,5°}} = 8,3\ \mathrm{m/s}.$$

Ta hitrost narašča z naraščajočo razdaljo (slika 3).

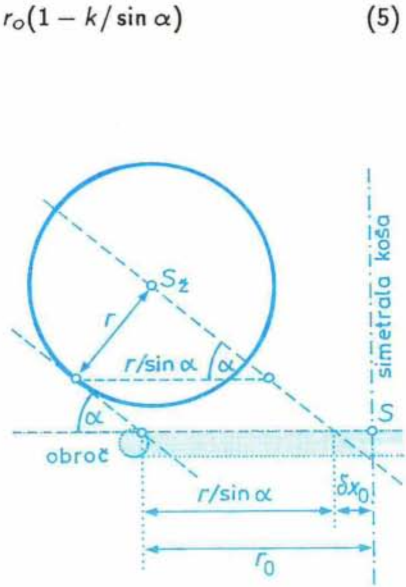
Žoga z maso $m = 0{,}6$ kg ima pri tej hitrosti kinetično energijo $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,6\ \mathrm{kg}\cdot 8,3^2\ \mathrm{m^2s^{-2}} = 21$ joulov. Pri pospeševanju žoge mora metalčeva roka opraviti tolikšno delo, kot da bi telo z maso 2 kilogramov dvignila meter visoko. Če traja pospeševanje 0,2 sekunde, dela tedaj z močjo 21 joulov/0,2 sekunde = 105 wattov.

Zanima nas še, kolikšen je kot α pri najugodnejšem kotu β_n? Iz enačbe (3) dobimo za ta primer z adicijskimi izreki za kotne funkcije $\alpha = 45° - \frac{1}{2}\beta_0$. Pri našem zgledu meri ta kot $\alpha = 45° - \frac{1}{2}9,5° = 40°$.

V premeru meri obroč koša 18 col ($2r_o = 45{,}7$ cm) in žoga 9,5 col ($2r = 24{,}1$ cm), tako da je razmerje radijev žoge in obroča $r/r_o = k = 0,53$. Žoga zato lahko zgreši s svojim središčem sredino obroča največ za odmik

$$\delta x_o = r_o - \frac{r}{\sin\alpha} = r_o(1 - k/\sin\alpha) \tag{5}$$

v eno ali drugo stran. Kljub temu gre skozi obroč, če prileti pod kotom α. Upoštevali smo na eni in drugi strani skrajni odmik, pri katerem se žoga ravno podrsa po obroču (slika 2). Žoga gre skozi obroč tudi še pri nekoliko večjem odmiku, ko se odbije na obroču. Vendar takih košev in košev, pri katerih se žoga odbije na tabli, tu nismo upoštevali.



Slika 2. Dopustni odmik pri letu žoge skozi obroč.

Pri metu z meje območja treh točk pod najugodnejšim kotom je največji dovoljeni odmik po enačbi (5)

$$\delta x_o = 22,9 \text{ cm} (1 - 0,53/\sin 40^\circ) = 4 \text{ cm}$$

Nazadnje se zanimajmo še za to, kako se spremeni odmik, če malo spremenimo kot β. Enačbo (2) zapišemo za povečani kot β':

$$x_o' = \frac{v^2}{g \cos\beta_0}(\sin(2\beta' - \beta_0) - \sin\beta_0)$$

od nje odštejemo enačbo (2) in razliko delimo z enačbo (2):

$$\frac{x_o' - x_o}{x_o} = \frac{\delta x_o}{x_o} = \frac{\sin(2\beta' - \beta_0) - \sin(2\beta - \beta_0)}{\sin(2\beta - \beta_0) - \sin\beta_0}$$

Števec predelamo z enačbo za razliko sinusov in nato uporabimo enačbo za kosinus vsote kotov:

$$\sin(2\beta' - \beta_0) - \sin(2\beta - \beta_0) = 2\cos(2\beta - \beta_0 + \delta\beta)\sin\delta\beta =$$

$$= 2\cos(2\beta - \beta_0)\cos\delta\beta\sin\delta\beta - 2\sin(2\beta - \beta_0)\sin^2\delta\beta$$

Pri tem smo uvedli razliko kotov $\delta\beta = \beta' - \beta$. Ta razlika je majhna in njen sinus je tudi majhen. Tako je drugi člen, ki vsebuje kvadrat njenega sinusa, precej manjši od prvega. Odločilni prvi člen postane enak nič pri najugodnejšem kotu β_n. Tedaj velja namreč $2\beta_n - \beta_0 = 90^\circ$, a kosinus pravega kota je enak nič. Pri najugodnejšem kotu dobimo najmanjši relativni odmik:

$$\frac{\delta x_o}{x_o} = -\frac{2\sin^2\delta\beta}{1 - \sin\beta_0} \tag{6}$$

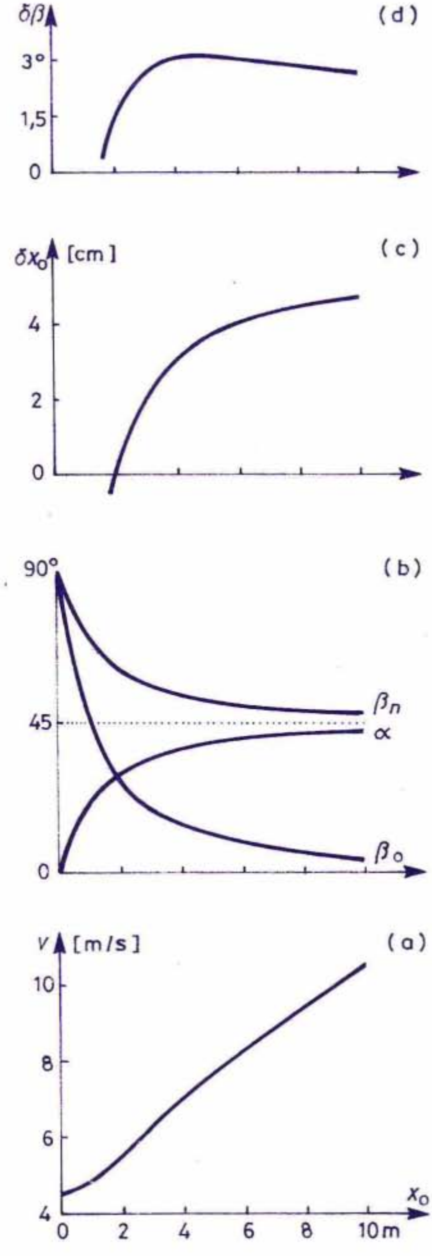
Za koliko stopinj se lahko metalec pri metu pod najugodnejšim kotom z meje območja treh točk zmoti v eno ali v drugo stran, da ne bo zgrešil meta? V enačbo, ki jo dobimo iz (6)

$$\delta\beta = \sqrt{\frac{(1 - \sin\beta_0)|\delta x_o|}{2x_o}}$$

vstavimo $x_o = 6$ m, $\beta_0 = 9,5^\circ$ in $\delta x_o = 4$ cm, pa dobimo $\delta\beta = 0,053 = 3^\circ$. Kot v stopinjah izračunamo tako, da kot v ločni meri pomnožimo s $360^\circ/2\pi$.

Tudi sicer dosežemo pri določanju kotov brez merjenja nenatančnost na nekaj stopinj. Črta, ki jo s prosto roko narišemo skozi dve točki v razmiku deset centimetrov, je za okoli 3° odklonjena od premice, narisane z ravnilom.

Po vsem tem si ne moremo kaj, da ne bi občudovali zanesljivosti košarkarjev pri metu na koš. P.J.Brancazio je v članku *Physics of basketball*, American Journal of Physics **49** (1981) 356 poročal o okoli 80 metih dobrih košarkarjev. Mete je med igro posnel s filmsko kamero in po posnetkih premeril. Pri uspešnih metih je bil kot zelo blizu najugodnejšega kota. Dobri košarkarji dosežejo v igri, ko jih nasprotniki pri metu ovirajo, 50 % in več zadetkov. Pri neoviranih metih v igri izkoristek naraste na kakih 70 % in pri kazenskih metih na 90 %. Po *Guinessovi knjigi rekordov* iz leta 1980 je Ted St.Martin leta 1977 zadel 2036 zaporednih kazenskih metov na koš, Fred L.Newman pa je leta 1978 zadel 88 zaporednih kazenskih metov z zavezanimi očmi. R.Vinokur je v članku *Kinematika basketbol'nogo broska*, Kvant (1990) 4 (2), v katerem je dokaj podrobno obdelal gibanje žoge pri metu, opozoril na to, da mora izvrsten košarkar poleg



Slika 3. Začetna hitrost žoge pri metu pod najugodnejšim kotom (a), kot β_0, kot α in najugodnejši kot β_n (b), odmik δx_o (c) in odmik $\delta\beta$ (d) v odvisnosti od razdalje x_o pri višinski razliki $y_o = 1$ m