PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 5
Strani 258–262

Janez Rakovec:

# KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

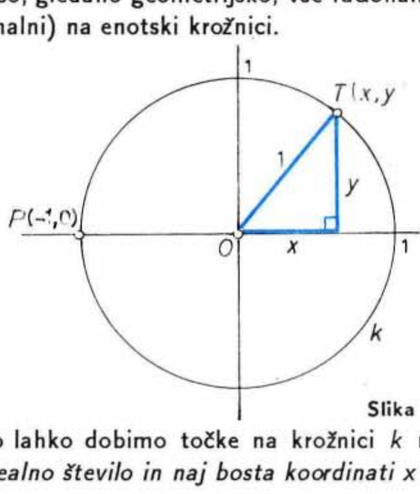
Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1054-Rakovec.pdf

## KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

V Presekovi knjižnici je ravnokar v slovenskem prevodu izšla težko pričakovana knjiga *Matka!* znamenitega matematika Sergea Langa. Eno njenih poglavij govori o *pitagorejskih trojicah*, to je o trojicah celih števil $(a, b, c)$, ki zadoščajo enačbi $a^2 + b^2 = c^2$. Avtor pokaže, kako dobimo prav vse pitagorejske trojice s tem, da poiščemo vse urejene pare racionalnih števil $(x, y)$, ki zadoščajo enačbi $x^2 + y^2 = 1$. To so, gledano geometrijsko, vse racionalne točke (ki imajo obe koordinati racionalni) na enotski krožnici.

V ravnini naj bo izbran pravokotni koordinatni sistem. Naj bo $k$ *enotska krožnica* v tej koordinatni ravnini, to je krožnica s polmerom 1 in s središčem v izhodišču $O$ koordinatnega sistema (slika 1). Torej je $k$ množica vseh tistih točk $T(x, y)$ v ravnini, katerih koordinati zadoščata enačbi $x^2 + y^2 = 1$. (Upoštevati je treba, da je razdalja poljubne točke $T(x, y)$ od izhodišča $O$ enaka $\sqrt{x^2 + y^2}$.)




**Slika 1.**

V knjigi *Matka!* izvemo, kako lahko dobimo točke na krožnici $k$ na naslednji način. *Naj bo t poljubno realno število in naj bosta koordinati x in y točke T(x, y) tile funkciji t-ja:*

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad (*)$$

*Tedaj točka T(x, y) leži na enotski krožnici k.* Iz (*) namreč izhaja:

$$x^2 + y^2 = \frac{1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} + \frac{4t^2}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = 1$$

Velja pa tudi tale, obratna trditev, ki jo zapišimo kot izrek:

IZREK. Za poljubno točko $T(x, y)$ na enotski krožnici $k$, različno od točke $P(-1, 0)$, obstaja takšno realno število $t$, da velja:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad , \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Preden bomo to dokazali, ne bo odveč nekaj pojasnil. Izrek pove, da se koordinati *vsake* točke na krožnici $k$, razen $P(-1,0)$, izražata s formulama (*). Če upoštevamo še prejšnjo ugotovitev, to pomeni: *Ko $t$ preteče vsa realna števila, tedaj točka $T(x, y)$, kjer je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$, preteče vso enotsko krožnico $k$, z izjemo točke $P(-1,0)$.* Lahko tudi rečemo: Z (*) je dana *preslikava* (predpis), ki vsakemu realnemu številu $t \in \mathbb{R}$ priredi ustrezno točko $T(x,y) \in k$ in ki množico realnih števil $\mathbb{R}$ preslika na enotsko krožnico $k$ brez točke $P(-1,0)$. Neodvisno spremenljivko $t$ navadno imenujemo *parameter*; pravimo, da je krožnica $k$ z zvezama (*) podana *parametrično.*

Z (*) smo torej dobili vse točke na enotski krožnici, razen točke $P(-1,0)$. Če pa za $t$ vstavimo poljubno racionalno število, sta očitno tudi $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in $y = \frac{2t}{1+t^2}$ racionalni števili. Izkaže se: Ko $t$ preteče vsa racionalna števila, tedaj ustrezna točka $T(x,y)$ preteče vse racionalne točke na enotski krožnici, razen točke $P(-1,0)$. (Glej konec dokaza našega izreka.) Tako torej dobimo vse urejene pare racionalnih števil $(x,y)$, ki zadoščajo enačbi $x^2+y^2=1$. Iz teh pa dobimo, kot že rečeno, vse pitagorejske trojice.

Že večkrat omenjena izjemna točka $P(-1,0)$ ima koordinati $x=-1$, $y=0$, ki se *ne* izražata s formulama (*). Če naj bo namreč $y = \frac{2t}{1+t^2} = 0$, mora biti $t=0$ in potem je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$, torej $x$ *ni* enak $-1$.

*Dokažimo* naš izrek najprej po algebraični poti, kakor je to narejeno v knjigi *Matka!* (le da se tam avtor povsod omeji na racionalna števila). Naj bo $T(x,y)$ poljubna točka na enotski krožnici $k$, različna od $P(-1,0)$. Želimo najti tako realno število $t$, da bosta izpolnjeni enačbi (*). Uganemo: Treba je vzeti $t = \frac{y}{x+1}$. Tedaj je $(x+1)t = y$ in potem $(x+1)^2t^2 = y^2$. Ker je $T(x,y) \in k$, je $x^2+y^2=1$ in tako je $y^2 = 1-x^2$. Torej je

$$(x+1)^2t^2 = 1-x^2 = (1+x)(1-x)$$

Ker je $x \neq -1$ in tako $x+1 \neq 0$, lahko to enačbo delimo z $x+1$ in dobimo:

$$(x+1)t^2 = 1-x$$

Preuredimo: $$x(1+t^2) = 1-t^2$$

In že imamo: $$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Potem je: $$x+1 = \frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

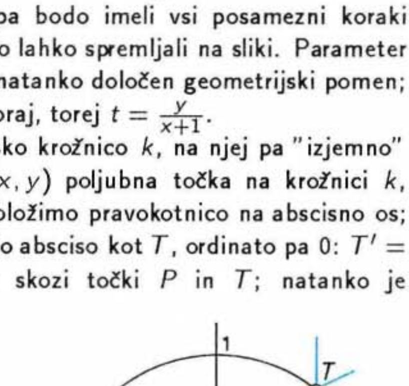
In končno: $$y = (x+1)t = \frac{2t}{1+t^2}$$

Torej za poljubno točko $T(x,y) \in k$, različno od $P(-1,0)$, res obstaja tak $t \in \mathbb{R}$ (našli smo ga: $t = \frac{y}{x+1}$), da velja: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$. (Če ima točka $T(x, y)$ racionalni koordinati, je seveda tudi $t$ racionalno število.)

Ta algebraični dokaz našega izreka je kar enostaven in kratek, seveda potem, ko enkrat uganemo, da moramo vzeti $t = \frac{y}{x+1}$. Pravzaprav pa lahko do tega pridemo brez ugibanja - le domisliti se moramo: če naj veljata enačbi (*), tedaj mora biti $x+1 = \frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$ in potem $\frac{y}{x+1} = \frac{2t\cdot(1+t^2)}{(1+t^2)\cdot 2} = t$. (Vendar tudi to ni kar na dlani - marsikdo se sploh ne bi domislil, da se splača pogledati, upoštevaje (*), koliko je tedaj $x+1$.)

Razmišljanje ob algebraičnem dokazu iz knjige *Matka!* me je spodbudilo, da sem si zamislil naslednji, *geometrijski dokaz* našega izreka. Ta bo sicer daljši od algebraičnega dokaza, zato pa bodo imeli vsi posamezni koraki nazoren, geometrijski pomen in jih bomo lahko spremljali na sliki. Parameter $t$ bomo vpeljali tako, da mu bomo dali natanko določen geometrijski pomen; izkazalo pa se bo, da je ta $t$ isti kot zgoraj, torej $t = \frac{y}{x+1}$.

V koordinatni ravnini imamo enotsko krožnico $k$, na njej pa "izjemno" točko $P(-1, 0)$ (slika 2). Naj bo $T(x, y)$ poljubna točka na krožnici $k$, različna od $P(-1, 0)$. Skozi točko $T$ položimo pravokotnico na abscisno os; ta seka abscisno os v točki $T'$, ki ima isto absciso kot $T$, ordinato pa 0: $T' = T'(x, 0)$. Potegnimo še premico skozi točki $P$ in $T$; natanko je določena, saj je $P \neq T$. Ta premica seka ordinatno os v neki točki $U$; njena abscisa je 0, njeno ordinato pa imenujmo $t$, torej $U = U(0, t)$. S točko $T$ je točka $U$ in njena ordinata $t$ natanko določena; izkazalo se bo, da je $t = \frac{y}{x+1}$. Obratno pa je z $U$ oziroma $t$ tudi točka $T$ natanko določena, saj je $T$ presečišče krožnice $k$ s premico skozi $P$ in $U$. Torej sta koordinati $x$ in $y$ točke $T$ natanko določeni s $t$, se pravi, $x$ in $y$ sta funkciji $t$-ja; izkazalo se bo, da je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in $y = \frac{2t}{1+t^2}$.




**Slika 2.**

Skozi izhodišče $O$ položimo pravokotnico na daljico $PT$; ta seka $PT$ v neki točki $S$. Ker je trikotnik $PTO$ enakokrak: $|PO| = |TO| = 1$ in je daljica $SO$ njegova višina, je točka $S$ središče osnovnice $PT$. Torej je $|PT| = 2|PS|$.

Trikotniki $POS$, $PUO$ in $PTT'$ so očitno pravokotni in imajo še skupen ostri kot $\psi$ pri oglišču $P$, zato so si podobni. Dolžine nekaterih njihovih stranic lahko že takoj ugotovimo: $|PO| = 1$, $|UO| = t$, $|PT'| = |PO| + |OT'| = 1 + x$, $|TT'| = y$.

Parameter $t$ bomo izrazili s koordinatama $x, y$ točke $T$.

Trikotnika $PUO$ in $PTT'$ sta podobna, zato je $\frac{|UO|}{|PO|} = \frac{|TT'|}{|PT'|}$. Seveda je $\frac{|UO|}{|PO|} = \frac{t}{1} = t$ in $\frac{|TT'|}{|PT'|} = \frac{y}{x+1}$. Torej je $t = \frac{y}{x+1}$.

Koordinati $x, y$ točke $T$ pa bomo izrazili s parametrom $t$.
Za trikotnik $PUO$ pove Pitagorov izrek: $|PU|^2 = |PO|^2 + |UO|^2 = 1 + t^2$. Torej je $|PU| = \sqrt{1+t^2}$.
Trikotnika $POS$ in $PUO$ sta podobna, zato je $\frac{|PS|}{|PO|} = \frac{|PO|}{|PU|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Torej je $|PS| = |PO| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Potem je $|PT| = 2|PS| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$.
Trikotnika $PTT'$ in $PUO$ sta podobna, zato je $\frac{|PT'|}{|PT|} = \frac{|PO|}{|PU|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Torej je $|PT'| = |PT| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2}$. Ker je $|PT'| = 1 + x$, je $x = |PT'| - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Nadalje je $\frac{|TT'|}{|PT'|} = \frac{|UO|}{|PO|} = t$. Torej je $y = |TT'| = |PT'| \cdot t = \frac{2}{1+t^2} \cdot t = \frac{2t}{1+t^2}$.

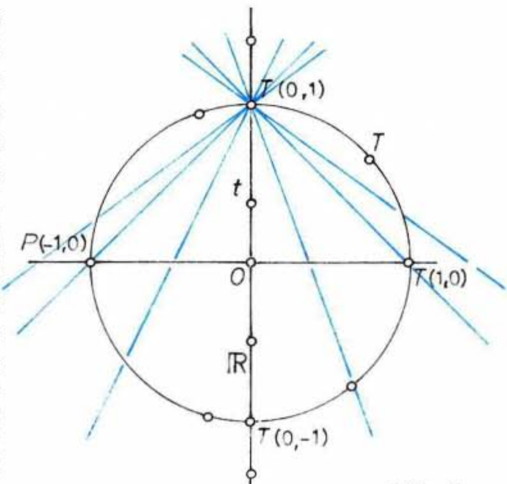
Tako smo dokazali naš izrek: Za poljubno točko $T(x, y) \in k$, različno od $P(-1, 0)$, smo našli tak $t \in \mathbb{R}$, da je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$. *Pri tem je $t$ ordinata presečišča premice skozi $P$ in $T$ z ordinatno osjo,* hkrati pa je $t = \frac{y}{x+1}$. (V primeru, ko je $T = P$, seveda takega $t$-ja ne moremo dobiti, saj gre skozi eno in isto točko $T = P$ nešteto premic.) *Obratno pa je točka $T(x, y)$ presečišče krožnice $k$ s premico skozi $P(-1, 0)$ in $U(0, t)$.*

Slika 2 je narejena za primer, ko je $x > 0$ in $y > 0$. Bralec lahko sam nariše slike za druge možnosti lege točke $T(x, y)$, ki so seveda nekoliko drugačne; ogleda naj si sliko 3. Naš dokaz pa v bistvu velja za vse primere, le da bi ga bilo treba tu in tam še izostriti. (Tako namesto: $|UO| = t$, $|TT'| = y$ upoštevamo: $|UO| = |t|$, $|TT'| = |y|$, kar velja vedno, tudi kadar je $y < 0$ in s tem $t < 0$.)

Geometrijski pomen parametra $t$ nam pomaga nazorno videti, kako ustrezna točka $T(x, y)$ (v smislu formul (*)) potuje po krožnici $k$, ko $t$ teče po realnih številih. Dogovorimo se, da poljuben $t$ kar enačimo s točko $U(0, t)$ na ordinatni osi; s tem pa množico realnih števil $\mathbb{R}$ enačimo z ordinatno osjo. *Zdaj lahko rečemo za poljuben $t \in \mathbb{R}$: ustrezna točka $T$ (v smislu formul (*)) je presečišče premice skozi $P$ in $t$ s krožnico $k$* (slika 3).

Ob sliki ni težko ugotoviti, da velja naslednje. Ko je $t = 0$, je ustrezna točka $T$ enaka $T(1, 0)$. Ko je $t = 1$, je $T = T(0, 1)$; ko pa je $t = -1$, je $T = T(0, -1)$. (V teh dveh primerih $T$ sovpada s $t$.) Ko $t$ narašča od 0 do

1, tedaj ustrezna točka $T$ potuje po prvem kvadrantu krožnice $k$ od $T(1,0)$ do $T(0,1)$. (Prvi kvadrant krožnice $k$ je pač njen presek s prvim kvadrantom koordinatne ravnine.) Ko $t$ narašča od 1 čez vsako mejo, tedaj $T$ potuje po drugem kvadrantu krožnice $k$ od $T(0,1)$ proti $P(-1,0)$. Ko pa $t$ pada od 0 do $-1$, tedaj $T$ potuje po četrtem kvadrantu krožnice $k$ od $T(1,0)$ do $T(0,-1)$. Ko $t$ pada od $-1$ pod vsako mejo, tedaj $T$ potuje po tretjem kvadrantu krožnice $k$ od $T(0,-1)$ proti $P(-1,0)$. (Seveda bi do teh spoznanj lahko prav tako prišli na podlagi formul (*).)




**Slika 3.**

Iz vsega tega lahko povzamemo: Ko $t$ preteče v pozitivnem smislu vso množico realnih števil $\mathbb{R}$, oziroma ordinatno os, tedaj ustrezna točka $T$ preteče vso enotsko krožnico $k$, z izjemo točke $P(-1,0)$, v pozitivnem smislu (ki je nasproten smislu urnega kazalca). Pri tem gre $T$ skozi vsako posamezno točko na $k$ samo enkrat, saj je tudi $t$ s točko $T$ natanko določen in zato dobimo vsako posamezno točko na $k$ samo pri enem $t$-ju. Torej lahko rečemo:

Preslikava, ki vsakemu $t \in \mathbb{R}$ priredi ustrezno točko $T \in k$ (v smislu formul (*)), preslika množico realnih števil $\mathbb{R}$ *bijektivno* (povratno enolično) na enotsko krožnico $k$ brez točke $P(-1,0)$.

O tej preslikavi smo spregovorili že takoj za našim izrekom. Zdaj pa smo še dodali ugotovitev o njeni bijektivnosti.

Za bralce, ki dobro poznajo kotne funkcije, ne bo pretežka naslednja

**NALOGA**

Na sliki 2 sta označena kota $\sphericalangle TPT' = \psi$ in $\sphericalangle TOT' = \varphi$. Kakšna je zveza med njima? Parameter $t$ (ordinato točke $U$) in koordinati $x, y$ točke $T$ izrazi s kotnimi funkcijami kota $\psi$. Odtod izpelji formuli: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

*Janez Rakovec*