PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 5
Strani 264–267

Boris Lavrič:

OBRAT EULERJEVEGA IZREKA

Ključne besede: matematika, geometrija.

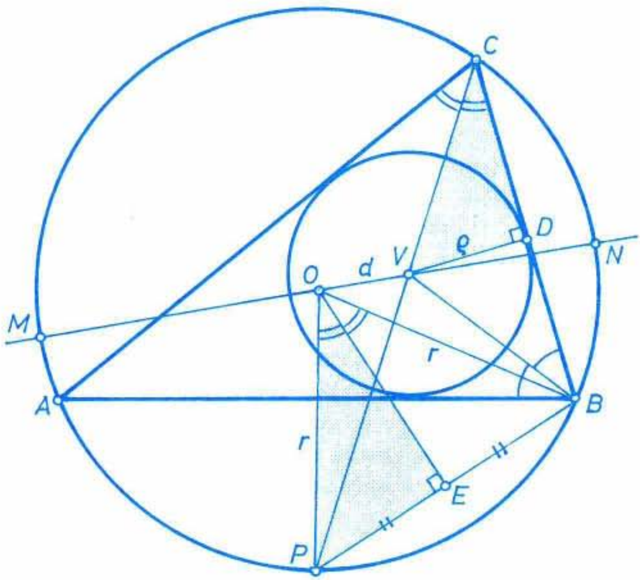
Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1054-Lavric.pdf

OBRAT EULERJEVEGA IZREKA

Označimo z r in ρ dolžini polmerov očrtane in včrtane krožnice danega trikotnika ABC. Že v osemnajstem stoletju je velik matematik Leonhard Euler (1707 - 1783) dokazal, da razdaljo d med središčema obeh krožnic lahko izrazimo s formulo

$$d^2 = r^2 - 2\rho r \tag{1}$$

ki se zdaj po njem imenuje (takšnih formul je še nekaj!). Oglejmo si dokaz te formule, ki nam bo omogočil utemeljiti zanimiv "obrat" lastnosti (1):



Slika 1

Označimo z O in V središči očrtane in včrtane krožnice trikotnika ABC in položimo skozi O in V premer MN očrtane krožnice. Spustimo pravokotnico VD na stranico BC, kotnosimetralo CV trikotnika ABC pa podaljšajmo do sečišča P z očrtano krožnico. Nato načrtajmo še višino OE enakokrakega trikotnika PBO. Seveda E razpolavlja osnovnico PB, torej velja

$$| PB | = 2 \, | PE | \tag{2}$$

Ker je središčni kot POB nad tetivo PB dvakrat večji kot obodni kot PCB nad isto tetivo, velja še

$$\sphericalangle POE = \frac{1}{2}\sphericalangle POB = \sphericalangle PCB \tag{3}$$

Primerjajmo zdaj kota BVP in VBP. Upoštevajmo, da je prvi zunanji kot trikotnika BCV, da sta BV in CV kotni simetrali trikotnika ABC in da sta ABP in ACP obodna kota nad isto tetivo AP, pa dobimo

$$\begin{aligned}\sphericalangle BVP &= \sphericalangle VBC + \sphericalangle BCV = \\ &= \sphericalangle VBA + \sphericalangle ACP = \\ &= \sphericalangle VBA + \sphericalangle ABP = \sphericalangle VBP\end{aligned}$$

Od tod sledi enakost

$$|\, PB \,| = |\, PV \,| \tag{4}$$

Točki M in N smo določili tako, da velja $|\, MV \,| = r + d$ in $|\, VN \,| = r - d$ ali obratno, zato po izreku o sekantah dobimo

$$|\, PV \,| \cdot |\, VC \,| = |\, MV \,| \cdot |\, VN \,| = r^2 - d^2 \tag{5}$$

Iz (3) preberemo, da sta pravokotna trikotnika PEO in VDC podobna, zato velja

$$\rho : |\, VC \,| = |\, VD \,| : |\, VC \,| = |\, PE \,| : |\, PO \,| = |\, PE \,| : r \tag{6}$$

od koder z uporabo (2), (4) in (5) dobimo iskano formulo

$$2\rho r = 2\,|\, PE \,| \cdot |\, VC \,| = |\, PV \,| \cdot |\, VC \,| = r^2 - d^2$$

Dokaz enakosti (1) je s tem končan, bralec pa bo brez težav iz (1) izluščil še oceno

$$r \geq 2\rho$$

in ugotovil, da v njej nastopi enačaj natanko takrat, kadar je trikotnik ABC enakostraničen.

Zdaj je na vrsti obrat lastnosti (1):

Predpostavimo, da razdalja d med središčema krožnic s polmeroma dolžine r in ρ zadošča enakosti (1). Potem velja

$$r \geq 2\rho \quad \text{in} \quad (r-\rho)^2 = \rho^2 + d^2 > d^2$$

Od tod sledi $r > \rho + d$, torej krožnica s polmerom ρ leži znotraj krožnice s polmerom r. Ponuja se naslednje vprašanje: Ali obstaja kak trikotnik, ki mu je večja krožnica očrtana, manjša pa včrtana? Ne le, da je odgovor pritrdilen, velja še več:

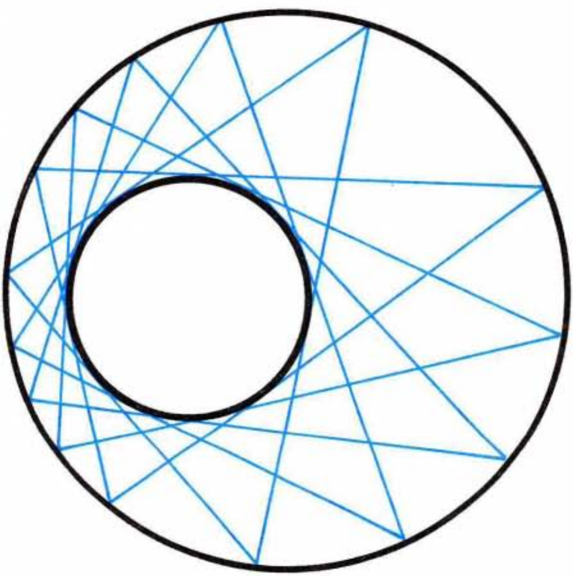
Vsak trikotnik, ki je včrtan večji krožnici in se z dvema stranicama dotika manjše, je njej očrtan.

Utemeljitev te trditve bomo oprli na dokaz formule (1): Včrtajmo v večjo krožnico s središčem O trikotnik ABC, ki naj se s stranicama AC in BC dotika manjše krožnice s središčem V. Točke M, N, P, D in E postavimo tako kot pri dokazu zveze (1). Prav tako lahko ugotovimo, da veljajo lastnosti (2), (3), (5) in (6). Združimo (1) in (5) v

$$|PV| \cdot |VC| = 2\rho r$$

iz (6) vzemimo $|PE| \cdot |VC| = \rho r$ in iz dobljenih enakosti preberimo $|PV| = 2|PE|$. Uporabimo še (2) in dobimo $|PV| = |PB|$, torej tudi

$$\sphericalangle BVP = \sphericalangle VBP$$



Slika 2

Od tod zaradi enakosti $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ABP$ sledi