PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 4
Strani 216–218

Damjan Kobal:

NENAVADNI PREIZKUS

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1050-Kobal.pdf

RAZVEDRILO

NENAVADEN PREIZKUS

Ker je ta članek nastal na pobudo in kot odgovor na pismo našega bralca Bojana Žižka, ga začnimo z njegovim stavkom:

"Preizkus deljenja lahko opravimo z množenjem. Kaj pa množenje? Ali lahko na kakšen način preverimo pravilnost množenja? Seveda brez računalnika in z uporabo enostavnejših operacij, kot je prvotno množenje?"

Pa najprej na primerih predstavimo idejo, ki nam jo je posredoval Bojan Žižek.

Zanima nas, ali smo pravilno zmnožili: $77 \times 9 = 693$. Opišimo naš nenavadni preizkus:

$$77 \times 9 = 693$$
$$(7+7) \times 9 \mid (6+9+3)$$
$$14 \times 9 \mid 18$$
$$(1+4) \times 9 \mid (1+8)$$
$$5 \times 9 \mid 9$$
$$45 \mid 9$$
$$(4+5) \mid 9$$
$$9 = 9$$

Namesto vsakega števila, ki nastopa v množenju, napišemo vsoto njegovih števk. Za tako dobljena števila postopek ponovimo. Postopek ponavljamo, dokler v izrazu ne dobimo samih enomestnih števil. Na levi dobljeni števki zmnožimo. Postopek seštevanja števk ponovimo. Če je bilo množenje na začetku pravilno, bomo vselej na koncu dobili na levi in desni enaki števki.

Zapišimo še nekaj primerov:

a) $25 \times 25 = 625$
$$7 \times 7 \mid 13$$
$$49 \mid 4$$
$$13 \mid$$
$$4 = 4$$

b) $26531 \times 987 = 26186097$
$$17 \times 24 \mid 39$$
$$8 \times 6 \mid 12$$
$$48 \mid 3$$
$$12 \mid 3$$
$$3 = 3$$

c) $17 \times 24 \neq 39$
$$8 \times 6 \mid 12$$
$$48 \mid 3$$
$$12 \mid 3$$
$$3 = 3$$

d) $16 \times 9 \neq 532$
$$7 \times 9 \mid 10$$
$$63 \mid 1$$
$$9 \neq 1$$

Verjetno se to "čaranje" marsikomu zdi nenavadno, skoraj neverjetno ... Poskusite s primeri še sami! Zaman boste iskali primer, ki se ne bi iztekel "pravilno".

Pisec teh vrstic vas toplo vabi, da sami razvozlate to "skrivnost", gotovo pa jo boste lažje razkrili s pomočjo naslednjih odstavkov.

Za naravno število n, bomo s $s(n)$ označili vsoto števk števila n. Tako velja na primer $s(101) = 2, s(999) = 27, \ldots$ Smiselno je napisati na primer $s(s(s(199))) = s(s(19)) = s(10) = 1$. Očitno je, da za vsako naravno število n dovolj dolga "vrsta s-ov": $s(s(s...(s(n))..))$ da število med 1 in 9. Pa označimo to število s $S(n)$. Tako je na primer $S(10) = s(10) = 1, S(98) = s(s(98)) = s(17) = 8, S(199) = 1$, itd.

S takimi oznakami se naš preizkus množenja napiše zelo enostavno:

$$p \times q = n$$
$$S(p) \times S(q) \mid S(n)$$
$$S(S(p) \times S(q)) = S(n)$$

"Skrivnost" bo torej razjasnjena, če pokažemo, da velja sklep

$$p \times q = n \Rightarrow S(S(p) \times S(q)) = S(n)$$

Poglejmo si pobliže, kaj pravzaprav pomenita $s(n)$ in $S(n)$. Zapišimo število n v obliki:

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_l 10^l$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_l$ števke, ki nastopajo v (desetiškem) zapisu števila n. Iz zapisa

$$n = a_0 + a_1(1+9) + a_2(1+9)^2 + \ldots + a_l(1+9)^l$$

vidimo, da je

$$n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l + 9k_0$$

pri čemer je k_0 naravno število. Torej n in $s(n)$ pri deljenju z 9 dasta enak ostanek. Od tod sledi, da je

$$n = S(n) + 9k, k \in \mathbb{N} \qquad (a)$$