PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 3
Strani 186–190

Boris Lavrič:

TRIANGULACIJE VEČKOTNIKOV

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1036-Lavric-veckotnik.pdf

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

TRIANGULACIJE VEČKOTNIKOV

Najprej na kratko opredelimo nekaj pojmov, ki jih bomo rabili v nadaljevanju.

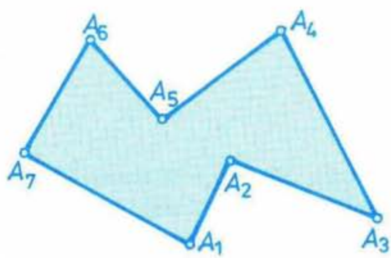
Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ različne točke dane ravnine.

Večkotnik z oglišči $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je končen del ravnine, ograjen s sklenjeno črto, sestavljeno iz daljic $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Te daljice imenujemo *stranice* večkotnika in morajo ustrezati pogojema:

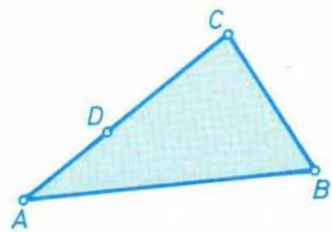
a. Sosednji stranici, torej stranici s skupnim ogliščem, ne ležita na isti premici.

b. Nesosednji stranici nimata skupnih točk.

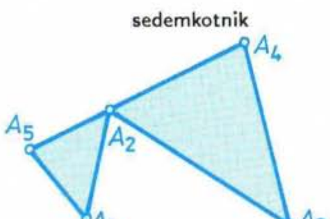
Če ima večkotnik n oglišč, mu rečemo n-kotnik.



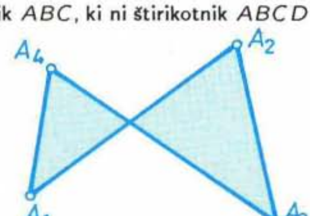
sedemkotnik



trikotnik ABC, ki ni štirikotnik $ABCD$



lika na levi in desni nista večkotnika

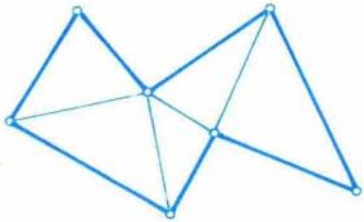


Navedena definicija je nekoliko prilagojena potrebam tega sestavka. Tako definirani večkotnik se namreč v literaturi pogosto imenuje *enostavni ravninski večkotnik*.

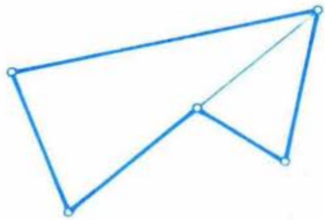
Stranice tvorijo *rob* večkotnika, ostale točke večkotnika pa njegovo *notranjost*. Večkotnik je *konveksen* ali *izbočen*, če so vsi njegovi notranji koti izbočeni, torej manjši od 180°.

Triangulacija večkotnika $A_1A_2 \ldots A_n$ je tako razkosanje tega večkotnika na trikotnike z oglišči v točkah $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pri katerem poljubna dva trikotnika bodisi nimata nobene skupne točke bodisi imata skupno le oglišče ali le stranico.

Konveksni večkotnik trianguliramo zelo preprosto. Poljubno izbrano oglišče zvežemo z vsemi ostalimi in konveksni večkotnik tako razdelimo na ustrezne trikotnike. S triangulacijo nekonveksnega večkotnika pa je več dela.



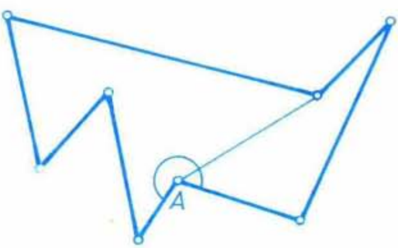
triangulacija sedemkotnika



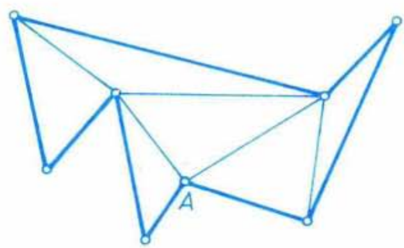
razkosanje petkotnika – ni triangulacija

Izberemo oglišče takega večkotnika, ob katerem je notranji kot večji od 180° (glej definicijo), in ga označimo z A. Poglejmo iz A v notranjost večkotnika proti njegovemu robu. Opazimo vsaj eno oglišče, saj bi v nasprotnem primeru iz A videli le eno stranico, kar pa ni mogoče. Z diagonalo, ki veže A s tem ogliščem, razdelimo večkotnik na dva večkotnika z manjšim številom stranic. Na podoben način se nato lotimo teh dveh večkotnikov in nadaljujemo z razkosavanjem, dokler ne pridemo do triangulacije.

Primer trianguliranja osemkotnika je prikazan na naslednji risbi



prvi korak trianguliranja



ena od (dveh možnih) triangulacij

Večkotnik ima lahko več triangulacij, vse pa imajo enako trikotnikov. Velja namreč tale rezultat.

IZREK 1. *Vsaka triangulacija n-kotnika ima natanko n-2 trikotnikov.*

Dokaz bo s pomočjo matematične indukcije zelo kratek.

Za trikotnik ni kaj dokazovati. Predpostavimo, da pri danem $n > 3$ izrek velja za vsak k-kotnik, kjer je $k < n$.

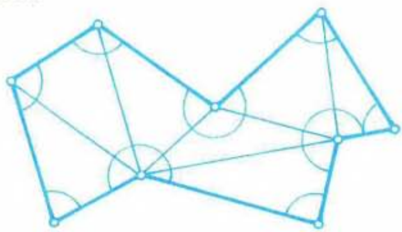
Ena od stranic poljubnega trikotnika iz triangulacije n-kotnika je njegova diagonala, ki ga razdeli na p-kotnik in q-kotnik. Pri tem seveda velja

$$3 \leq p < n, \quad 3 \leq q < n \text{ in } p + q = n + 2$$

Po predpostavki imata triangulaciji p-kotnika in q-kotnika $p-2$ oziroma $q-2$ trikotnikov, zato je v triangulaciji n-kotnika

$$(p-2) + (q-2) = p + q - 4 = n - 2$$

trikotnikov, prav to pa smo želeli dokazati.



Dobljeni rezulat nam omogoča določiti vsoto notranjih kotov n-kotnika. Ta je namreč enaka vsoti notranjih kotov vseh trikotnikov iz triangulacije n- kotnika, torej je enaka $(n-2)180^\circ$.

Povabimo zdaj bralca k nalogam iz obravnavane snovi.

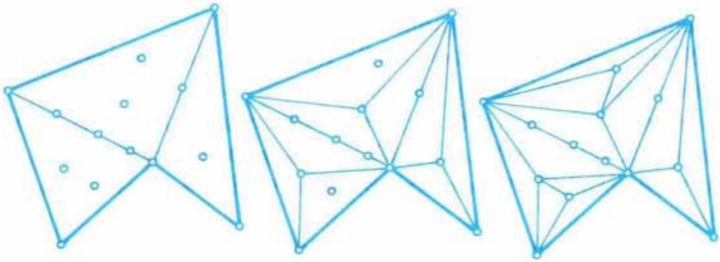
1. Koliko diagonal nastane pri triangulaciji n-kotnika?
2. Dokaži, da v vsaki triangulaciji večkotnika z najmanj petimi stranicami obstaja trikotnik, ki ima kvečjemu eno stranico na robu večkotnika.
3. Dokaži, da v vsaki triangulaciji n-kotnika, $n > 3$, obstajata vsaj dva trikotnika, ki imata dve stranici na njegovem robu.

Pojem triangulacije lahko posplošimo na naslednji način.

Naj bo $\mathcal{M}$ končna podmnožica točk danega n-kotnika in naj vsebuje vsa njegova oglišča $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *Triangulacija z oglišči v* $\mathcal{M}$ je tako razkosanje večkotnika $A_1A_2 \ldots A_n$ na trikotnike z oglišči v $\mathcal{M}$, da je vsaka točka množice $\mathcal{M}$ oglišče vseh tistih trikotnikov iz razkosanja, ki to točko vsebujejo.

če množice $\mathcal{M}$ ne navedemo, imenujemo pravkar definirano triangulacijo *posplošena triangulacija* večkotnika $A_1A_2 \ldots A_n$.

Oglejmo si zdaj enega od načinov, ki privede do triangulacije z oglišči v $\mathcal{M}$. Najprej trianguliramo večkotnik $A_1A_2 \ldots A_n$, kar že znamo storiti. Vsak dobljeni trikotnik ima lahko točke iz $\mathcal{M}$ še v svoji notranjosti in na stranicah. Če katera leži znotraj trikotnika, jo povežemo z njegovimi oglišči z daljicami. Enako storimo v novem razkosanju in tako nadaljujemo, dokler gre. Znotraj dobljenih trikotnikov ni več točk iz $\mathcal{M}$.



Nastale trikotnike razkosamo takole: Vse točke na eni stranici trikotnika zvežemo z daljicami z nasproti ležečim ogliščem in po potrebi enako storimo še s trikotnikoma, ki sta nastala ob drugih dveh stranicah trikotnika.

Kaj lahko povemo o številu trikotnikov posplošene triangulacije? Odgovor daje naslednji izrek.

IZREK 2. *Če ima množica $\mathcal{M}$ r točk na robu n-kotnika in k točk v njegovi notranjosti, je v poljubni triangulaciji z oglišči v $\mathcal{M}$ natanko $r+2k-2$ trikotnikov. Pri tem je seveda $r \geq n$.*

Dokaz. Naj ima triangulacija z oglišči v $\mathcal{M}$ m trikotnikov. Potem je vsota vseh njihovih notranjih kotov enaka $m180^\circ$. Enako vsoto dobimo, če seštejemo notranje kote n-kotnika, polne kote ob točkah iz $\mathcal{M}$ v notranjosti n-kotnika in iztegnjene kote ob ostalih točkah iz $\mathcal{M}$ na robu večkotnika. Torej velja

$$m180^\circ = (n-2)180^\circ + k360^\circ + (r-n)180^\circ$$

od koder sledi iskana enakost $m = r + 2k - 2$.