PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 3
Strani 134–139

Edvard Kramar:

POPOLNI KVADER

Ključne besede: matematika, geometrija, kvader, diofantske enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1036-Kramar.pdf

POPOLNI KVADER

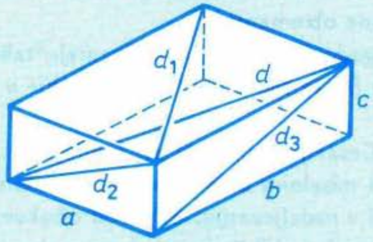
Eden zelo starih, lahko razumljivih, vendar do današnjih dni nerešenih problemov je poiskati kvader, ki bi imel za dolžine vseh stranic, vseh stranskih in tudi glavne diagonale celoštevilske vrednosti. Poiskati bi bilo treba sedem naravnih števil a, b, c, d_1, d_2, d_3 in d, ki so povezana z naslednjimi enačbami

$$a^2 + b^2 = d_1^2$$

$$a^2 + c^2 = d_2^2$$

$$b^2 + c^2 = d_3^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$



Kvadru, ki bi imel tako lastnost, bomo rekli *popolni kvader*. Kljub številnim poskusom, tega problema še do danes ni uspelo razrešiti. Ni uspelo najti nobene sedmerice naravnih števil, ki bi hkrati zadoščala zgornjim enačbam, niti ni uspelo dokazati, da take sedmerice ni. V zadnjem času so si poskušali pomagati tudi z vse zmogljivejšimi računalniki, vendar so uspeli, le preveriti, da ne obstaja popoln kvader, s stranicami, katerih dolžine ne presegajo nekaj deset tisoč. Seveda pa s tem odgovora še ni. Ker matematiki niso uspeli rešiti zgornjega problema v celoti, so nekoliko popustili v naštetih zahtevah. Zahtevali so, da je le šest od zgornjih količin celoštevilskih. Če se po vrsti odrečemo, da je dolžina glavne diagonale, ene od stranskih diagonal, oziroma ene od stranic naravno število, dobimo tri nove probleme. Vendar pa tudi ti niso čisto enostavno rešljivi, izkazalo pa se je, da ima vsak od njih neskončno rešitev. Pokazali bomo, kako je uspelo najti neskončno mnogo rešitev za dva od teh problemov.

Problem 1. *Poišči kvader, ki ima za dolžine stranic in stranskih diagonal naravna števila.*

Rešiti moramo torej sistem naslednjih treh enačb

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + c^2 = d_2^2, \quad b^2 + c^2 = d_3^2$$

v naravnih številih a, b, c, d_1, d_2 in d_3. Zapišimo najprej a v obliki

$a = \pm(ps - c^2/(ps))/2$, kjer sta zaenkrat p in s še poljubna. Na koncu bomo vzeli tak znak, da bo število a pozitivno. Izračunajmo

$$a^2 + c^2 = \frac{1}{4}(p^2s^2 - 2c^2 + \frac{c^4}{p^2s^2}) + \frac{4c^2}{4} = \frac{1}{4}(ps + \frac{c^2}{ps})^2$$

Dobili smo kvadrat, vendar zaenkrat racionalnega števila. Podobno postavimo $b = \pm(qs - c^2/(qs))/2$, kjer je tokrat q zaenkrat še poljubno naravno število, s pa isti kot zgoraj. Na isti način kot prej dobimo

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{4}(qs + \frac{c^2}{qs})^2$$

Oglejmo si še, kako je z vsoto kvadratov prvih dveh neznank

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}((p^2 + q^2)s^2 - 4c^2 + \frac{(p^2 + q^2)c^4}{p^2q^2s^2})$$

Najprej izberimo števili p in q tako, da bo $p^2 + q^2 = r^2$, torej naj bo (p, q, r) pitagorejska trojica. Sledi

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(r^2s^2 - 4c^2 + \frac{r^2c^4}{p^2q^2s^2})$$

Sedaj pa izberimo število s tako, da uničimo zadnja dva člena. Torej $s = rc/(2pq)$. Da se v tem izrazu znebimo ulomka, postavimo $c = 2pqt$, torej, $s = rt$, kjer bomo tudi t še naknadno določili. Pojdimo sedaj po vrsti nazaj. Najprej je $a^2 + b^2 = r^2s^2/4 = r^4t^2/4$ in

$$a = \pm(prt - 4pq^2t/r)/2$$

Iz obeh izrazov vidimo, da je smiselno izbrati $t = 2r$, oziroma $s = = 2r^2$ in dobimo $a = \pm(pr^2 - 4pq^2)$ in podobno $b = \pm(qr^2 - 4p^2q)$, saj tu p in q vlogi zamenjata. Vrnimo se k tretji stranici $c = 2pq.2r = = 4pqr$. Ali so vsote kvadratov zopet kvadrati naravnih števil? Izračunajmo

$$a^2 + b^2 = r^2s^2/4 = r^6$$

$$a^2 + c^2 = (2pr^2 + 8pq^2)^2/4 = (pr^2 + 4pq^2)^2$$

$$b^2 + c^2 = (2qr^2 + 8p^2q)^2/4 = (qr^2 + 4p^2q)^2$$

Našli smo torej za a, b, c, d_1, d_2 in d_3 naslednjo množico rešitev

$$\begin{array}{c} a = p|4q^2 - r^2|, \quad b = q|4p^2 - r^2|, \quad c = 4pqr \\ d_1 = r^3, \quad d_2 = p(4q^2 + r^2), \quad d_3 = q(4p^2 + r^2) \end{array} \tag{1}$$

pri čemer mora biti (p, q, r) pitagorejska trojica. Za p in q lahko uporabimo znane obrazce: $p = u^2 - v^2$, $q = 2uv$, $r = u^2 + v^2$, $u, v \in N$, $u > v$ (gl. npr. Presek, 14, str. 274) in spoznamo, da imamo neskončno kvadrov, ki imajo vse tri robove in vse tri stranske diagonale celoštevilske. Kvadri, ki jih dobimo po zgornjih obrazcih, se imenujejo tudi *Eulerjevi kvadri.* Zapišimo nekaj konkretnih primerov takih kvadrov

p	q	r	a	b	c	d_1	d_2	d_3
3	4	5	117	44	240	125	267	244
5	12	13	2035	828	3120	2197	3725	3228
15	8	17	495	4888	8160	4913	8175	9512
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Izkaže se, da z zgornjimi obrazci ne dobimo vseh rešitev problema 1. Na primer kvader s stranicami 85, 132, 720 je rešitev zgornjega problema, vendar ga ne dobimo iz zgornjih obrazcev. Diagonale ima namreč po vrsti 157, 725 in 732 in nobena ni oblike r^3, $r \in N$. Očitno so vsi večkratniki rešitve zgornjega problema zopet rešitve, velja pa tudi tole: če je kvader s stranicami (a, b, c) rešitev problema 1, je tudi kvader s stranicami (ab, bc, ac) rešitev tega problema, v kar se lahko vsak sam prepriča. Na ta način še obogatimo množico rešitev prvega problema, vendar tudi s tem še ne dobimo vseh rešitev. Pojavi se vprašanje, ali ima kakšen od dobljenih kvadrov tudi telesno diagonalo celoštevilsko. Na žalost se je izkazalo, da ne. Ker s temi rešitvami problema 1 nismo izčrpali vseh, s tem ni rečeno, da ne obstaja kvader, ki bi imel vseh sedem nastopajočih količin celoštevilskih.

Problem 2. *Določi kvader, ki ima za dolžine vseh stranic, glavne diagonale in dveh stranskih diagonal celoštevilske vrednosti.*

Vzemimo, da za d_3 ne zahtevamo celoštevilske vrednosti. Iščemo torej šesterico naravnih števil, ki so povezana z enačbami

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + c^2 = d_2^2, \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Ker sta (a, b, d_1) in (a, c, d_2) pitagorejski trojici, jih kot vemo lahko pišemo v obliki

$$a = s.2u_1v_1, \quad b = s(u_1^2 - v_1^2), \quad d_1 = s(u_1^2 + v_1^2)$$

$$a = t.2u_2v_2, \quad c = t(u_2^2 - v_2^2), \quad d_2 = t(u_2^2 + v_2^2)$$

kjer so $s, t, u_1, u_2, v_1, v_2 \in N$, $u_1 > v_1$, $u_2 > v_2$ in zaenkrat še poljubni. Ker morata oba produkta za a dati isto vrednost, izberimo $s = u_2v_2$, $t = u_1v_1$. Na razpolago imamo še štiri parametre, pustili bomo zaenkrat tri med njimi neodvisne in postavili $u_2 = p$, $v_2 = q$, $u_1 = 2r$, $v_1 = p + q$, kjer $p, q, r \in N$. Za stranice in stranski diagonali sedaj dobimo

$$a = 4pqr(p+q), \quad b = pq(4r^2 - (p+q)^2), \quad c = 2r(p+q)(p^2 - q^2)$$

$$d_1 = pq(4r^2 + (p+q)^2), \quad d_2 = 2r(p+q)(p^2 + q^2)$$

Izpolniti moramo še tretjo enačbo v naravnih številih $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ oziroma $d_1^2 + c^2 = d^2$. Dobimo

$$d_1^2 + c^2 = p^2q^2(4r^2 + (p+q)^2)^2 + 4r^2(p+q)^2(p^2 - q^2)^2$$

Ali se da izraz na desni spraviti na popoln kvadrat pri primerni izbiri parametrov p, q in r? Izkazalo se je, da to zagotovo gre, če so v naslednji zvezi

$$p^2 + pq + q^2 = r^2 \tag{2}$$

Če to, upoštevamo, po malo daljšem računu zgornji izraz prevedemo na obliko

$$d_1^2 + c^2 = (2p^4 + 3p^3q + 6p^2q^2 + 3pq^3 + 2q^4)^2$$

kar pa zopet lahko poenostavimo, če upoštevamo zvezo (2)

$$d_1^2 + c^2 = (p^2 + r^2)^2(q^2 + r^2)^2$$

Nazadnje lahko povzamemo: če izberemo p, q in r tako, da so rešitve enačbe (2) v naravnih številih, so števila a, b, c, d_1 in d iz zvez

$$a = 4pqr(p+q), \quad b = pq(3r^2 - pq), \quad c = 2r(p+q)|p^2 - q^2|,$$

$$d_1 = pq(5r^2 + pq), \quad d_2 = 2r(p+q)(p^2 + q^2), \quad d = (p^2 + r^2)(q^2 + r^2)$$

rešitev problema 2. Pri tem smo pri stranici c pisali absolutno vrednost, da ni treba pisati zahteve $p > q$. O diofantski enačbi (2) je Presek pisal nazadnje v 5. številki 16. letnika. Od tam lahko razberemo, da dobimo bogato množico rešitev te enačbe z obrazci

$$p = u^2 - v^2, \quad q = 2uv + v^2, \quad r = u^2 + uv + v^2; \qquad u, v \in N,\ u > v$$

Te izraze bi sicer lahko vstavili v zgornje zveze, vendar bi dobili precej nepregledne obrazce. Zapišimo nekaj kvadrov, ki jih dobimo na ta način

p	q	r	a	b	c	d_1	d_2	d
3	5	7	3360	1980	1792	3900	3808	4292
8	7	13	43680	25256	5850	50456	44070	50794
5	16	19	127680	80240	184338	150800	224238	238162
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Hitro lahko opazimo, da imajo rešitvene šestorke skupne faktorje. Če na primer prvo delimo s 4, dobimo kvader s stranicami (840,448,495). Zopet se izkaže, da z zgornjimi obrazci ne dobimo vseh rešitev problema 2. Med drugim ne dobimo kvadra s stranicami (104,153,672), ki je najmanjši kvader med rešitvami problema 2.

Problem 3. *Poišči kvader, ki ima za dolžine dveh stranic, vseh stranskih in glavne diagonale naravna števila.*

Vzemimo, da naprimer c ni nujno naravno število, očitno pa je njegov kvadrat naravno število in ga označimo z e. Naša zahteva je sedaj poiskati naravna števila a, b, e, d_1, d_2, d_3 in d tako, da bodo izpolnjene enačbe

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + e = d_2^2$$

$$b^2 + e = d_3^2, \quad a^2 + b^2 + e = d^2$$

Tudi za ta problem je uspelo najti neskončno rešitev. Ker je zopet izpeljava malo daljša, jo tokrat izpustimo. Zapišimo samo nekaj konkretnih rešitev