PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 138–141

Jože Grasselli:

ALIKVOTNA ZAPOREDJA

Ključne besede: matematika, teorija števil, alikvotna zaporedja.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/982-Grasselli.pdf

ALIKVOTNA ZAPOREDJA

Če izberemo naravno število a, lahko z njim kot prvim členom še na razne načine naredimo neskončno zaporedje naravnih števil

$$a_1 = a, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \tag{1}$$

Oglejmo si dve pravili, ki povesta, kako iz a pridemo do zaporedja (1).

Pravilo večkratnikov: Iz člena a_n dobimo člen a_{n+1} tako, da členu a_n prištejemo a. Torej za vsak indeks $n \geqslant 1$ velja

$$a_{n+1} = a_n + a$$

Zato je $a_2 = a_1 + a = a + a = 2a$. Nato $a_3 = a_2 + a = 2a + a = 3a$ itd. Zaporedje (1) je tukaj

$$a, 2a, 3a, \dots, na, (n+1)a, \dots$$

sestavljajo pa ga vsi pozitivni večkratniki števila a. Pravilo večkratnikov je preprosto, saj zaporedje (1) takoj lahko zapišemo. Vidimo tudi, da so členi vsi med sabo različni in presežejo vsako še tako veliko vrednost.

Pravilo deliteljev (alikvotno pravilo): Če je pri indeksu $n \geqslant 1$ člen $a_n = 1$, je $a_{n+1} = 1$. Če pa je $a_n > 1$, je člen a_{n+1} vsota vseh pozitivnih deliteljev za a_n, ki so manjši od a_n. Ker ima a_n le končno mnogo deliteljev, je a_{n+1} natančno določeno naravno število. Zaporedje (1), ki ga dobimo iz a po pravilu deliteljev, imenujemo **alikvotno** zaporedje števila a.

Napravimo nekaj zgledov.

Zgled 1. Naj bo a praštevilo p. Edina pozitivna delitelja za p sta 1 in p. Po pravilu deliteljev je $a_2 = 1$ in potem $a_n = 1$ za indeks $n \geqslant 3$. Praštevilu p pripada torej alikvotno zaporedje

$$p, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots \tag{2}$$

Vsi členi od drugega naprej so 1. Ker je praštevil neskončno, je neskončno alikvotnih zaporedij oblike (2).

Zgled 2. Naj bo $a = 6$. Števila 1, 2, 3, 6 dajejo vse pozitivne delitelje za 6. Zato je po pravilu deliteljev $a_2 = 1 + 2 + 3 = 6$. Ker je $a_1 = a_2 = 6$, je $a_n = 6$ za vse indekse n. Številu 6 pripadajoče alikvotno zaporedje je

$$6, 6, 6, \dots, 6, 6, \dots$$

Število 6 ima tole lastnost: ko zanj uporabimo pravilo deliteljev, dobimo nazaj število 6. Naravno število c, večje od 1, je **popolno,** če pravilo deliteljev iz c napravi c. Poleg 6 so popolna števila še npr. 28, 496, 8128. Alikvotno zaporedje za popolno število c ima vse člene enake

$$c, c, c, \ldots, c, c, \ldots \tag{3}$$

Doslej so našli okrog trideset popolnih števil. Ni še znano, ali je popolnih števil le končno ali pa morda neskončno mnogo. Zato tudi ne vemo, koliko je alikvotnih zaporedij oblike (3).

Zgled 3. Naj bo $a = 220$. Iz $220 = 2^2.5.11$ vidimo, da so 1, 2, 4, 5, 10, 20, 11, 22, 44, 55, 110, 220 vsi pozitivni delitelji za 220. Ko ta števila, razen zadnjega, seštejemo, dobimo $a_2 = 284$. Ker je $284 = 2^2.71$, so vsi pozitivni delitelji za 284 zajeti v številih 1, 2, 4, 71, 142, 284. Od tod je po pravilu deliteljev $a_3 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Alikvotno zaporedje za 220 je tako

$$220, 284, 220, 284, \ldots, 220, 284, \ldots$$

Števili 220 in 284 sestavljata prijateljski par. Naravni števili a, b imenujemo namreč **prijateljski**, če pravilo deliteljev iz a napravi b, iz b pa a. Alikvotno zaporedje za tak prijateljski par je

$$a, b, a, b, \ldots, a, b, \ldots \tag{4}$$

Odkrili so že več tisoč prijateljskih parov. Ne vemo pa, ali je prijateljskih parov končno ali neskončno mnogo.

Zgled 4. Vzemimo $a = 12$. Določanje členov alikvotnega zaporedja za 12 razberemo iz preglednice

indeks n	člen a_n	pozitivni delitelji za a_n
1	12	$\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{6}, 12$
2	16	$\underline{1}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{8}, 16$
3	15	$\underline{1}, \underline{3}, \underline{5}, 15$
4	9	$\underline{1}, \underline{3}, 9$
5	4	$\underline{1}, \underline{2}, 4$
6	3	$\underline{1}, 3$
7	1	1

Podčrtana so vsakič števila, ki jih je treba sešteti, da iz a_n dobimo a_{n+1}. Ker je $a_7 = 1$, je seveda $a_n = 1$ za $n \geqslant 7$. Alikvotno zaporedje za 12 je tako

$$12, 16, 15, 9, 4, 3, 1, \ldots, 1, 1, \ldots \tag{5}$$

Naj bo zgledov dovolj.

Zgoraj smo videli, da v zaporedju večkratnikov takoj poznamo vse člene, ko izberemo začetni člen. Pri alikvotnih zaporedjih ni tako. Res je z izbiro začetnega člena a alikvotno zaporedje za a natančno določeno. Vendar pa v zaporedju posamezen člen poznamo šele, ko ga dejansko izračunamo. To pa že pri majhnih a ni zmeraj izvedljivo. More se namreč zgoditi tole: ko določamo člene a_2, a_3 in naprej, pridemo do člena a_n, ki je tako velik, da je zanj v razpoložljivem času nemogoče poiskati vse delitelje. V takem primeru člena a_{n+1} ne moremo izračunati in tudi o poznejših členih ničesar ne vemo.

Ali lahko kljub temu o alikvotnem zaporedju kaj splošnega izrečemo? Gotovo je, da pri vsakem a drži ravno ena od obeh možnosti:

1) Obstaja tako naravno število m, da so vsi členi alikvotnega zaporedja za a manjši od m.

2) Za vsako naravno število m so v alikvotnem zaporedju za a členi, ki so večji od m.

Vzemimo, da je izpolnjena možnost 1. Potem je $a_n < m$ za vsak indeks n in členi

$$a_1, a_2, ..., a_m \tag{6}$$

so neka izmed števil 1, 2, ..., $m - 1$. Ker je v (6) členov m in zanje na razpolago kvečjemu $m - 1$ vrednosti, morata vsaj dva člena biti enaka. Obstajata torej indeksa j, k, $1 \leqslant j < k \leqslant m$, ko je $a_j = a_k$. Naj bosta j, k najmanjša takšna indeksa in naj bo $k - j = t$. Enakost $a_j = a_k$ potem lahko zapišemo $a_j = a_{j+t}$. Če se člena ujemata, se ujemajo tudi njuni delitelji. Po pravilu deliteljev je zato $a_{j+1} = a_{j+t+1}$. Ker je $j + t + 1 = j + 1 + t$, imamo dalje $a_{j+1} = a_{j+1+t}$. Iz te enakosti po istem sklepu izhaja $a_{j+2} = a_{j+2+t}$. Ko tako nadaljujemo, najdemo

$$\begin{gathered} a_j = a_{j+t} \\ a_{j+1} = a_{j+1+t} \\ a_{j+2} = a_{j+2+t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j+(t-1)} = a_{j+(t-1)+t} \end{gathered} \tag{7}$$

Enakosti (7) kažejo: skupina t členov

$$a_j, a_{j+1}, ..., a_{j+(t-1)} \tag{8}$$

se ponovi, ko teče indeks členov od $j + t$ do $j + 2t - 1$. Iz zadnje enakosti v (7) sledi $a_{j+t} = a_{j+2t}$. Torej smo spet na začetku tabele (7) in členi (8) se še enkrat ponovijo, ko teče indeks od $j + 2t$ do $j + 3t - 1$. To ponavljanje se nadaljuje. Alikvotno zaporedje je torej od člena a_j naprej **periodično**, periodo sestavljajo členi (8), dolžina periode je t.

Alikvotna zaporedja, ki smo jih obravnavali zgoraj med zgledi, so vsa periodična. V (2) in (5) se ponavlja 1, v (3) pa c, dolžina periode je ena. V (4) se