PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 162–167

Vilko Domajnko:

PRESEKOVA NADLOGA – VOZLI

Ključne besede: razvedrilo, naloge, presekova nadloga.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/982-Domajnko-vozli.pdf

VOZLI

Tudi s tremi krajšimi vrvicami se lahko prav imenitno zabavamo. Položimo prvo izmed njih kar na mizo, drugo zavozlajmo na "tisti" najbolj preprosti in vsem dobro znani način, na tretji vrvici pa napravimo vozel v obliki osmice – tak, kakršnega vidimo na desni strani slike 1.

Vsaki izmed teh treh vrvic zatem staknimo oba njena prosta konca in jih naposled še lepo poravnajmo. Dobili bomo troje vozlov, ki nam jih kaže slika 2.

Slika 1

Slika 2

Tako, uvodna igra je za nami. Najbrž smo se v njej naučili dovolj, da se lahko sedaj lotimo zadeve že nekoliko bolj matematično. Definirajmo torej: **vozel** je sleherna sklenjena krivulja v tridimenzionalnem prostoru, ki v nobeni svoji točki ne seče same sebe.

Zgornja trojica je v smislu te definicije torej le fizična ponazoritev pravih matematičnih vozlov. Vendar pa takšni modeli kljub temu (ali pa predvsem zaradi tega) naravnost izvrstno služijo kot pomagalo pri obvladovanju teorije. In prav to njihovo lepo in atraktivno lastnost kanimo izkoristiti v tem članku.

Bralcem bo najbrž všeč navada, da imajo v teoriji vozlov nekateri izmed enostavnejših vozlov zaradi svojih nenavadnih in asociacijsko živahnih oblik tudi posebna opisna imena. Tako pravimo vozlu s slike 2 na levi *trivialni vozel* (marsikdo bi zanj namreč pripomnil, da pravzaprav sploh ni "zavozlan"), sredinskemu pravimo *detelja,* desnemu pa *osmica.*

Lotimo se sedaj zadeve še z njene nasprotne strani. Najprej narišimo sliko vozla in šele zatem poskusimo po njeni predlogi napraviti model tega vozla iz vrvice. Pri tem poskusu "vozlajmo" črte po papirju "kar tako" – križemkraž in sklenjeno vsepočez. Recimo, da pri tem nastane, kar je narisano na sliki 3.

Slika 4 *križemkraž*

petica *sveča* *objem*

Slika 3

Zdi se, da se ta vozel pač v marsičem loči od prejšnjih treh. Na njegovi risbi je veliko več križnih točk – to je morebiti prvo, kar pade v oči. Na risbi *trivialnega vozla* jih namreč sploh ni, risba *detelje* ima le tri križne točke, *osmica* le štiri, na risbi *križemkraža* pa jih je moč prešteti kar petdeset!

Poglej, poglej – našo prvo pogruntavščino lahko že zapišemo: vozle razlikujemo glede na število **križnih točk,** ki jih je opaziti na njihovih risbah.

Vendar pa na risbi slehernega vozla preštejemo zmeraj le najmanjše možno število križnih točk. In za *križemkraža* je že na prvi pogled očitno, da se ga da vsaj nekoliko razplesti, ne da bi ga bili pri tem prisiljeni razkleniti. Na njegovi risbi bi potemtakem smeli narisati tudi precej manj kakor petdeset križnih točk.

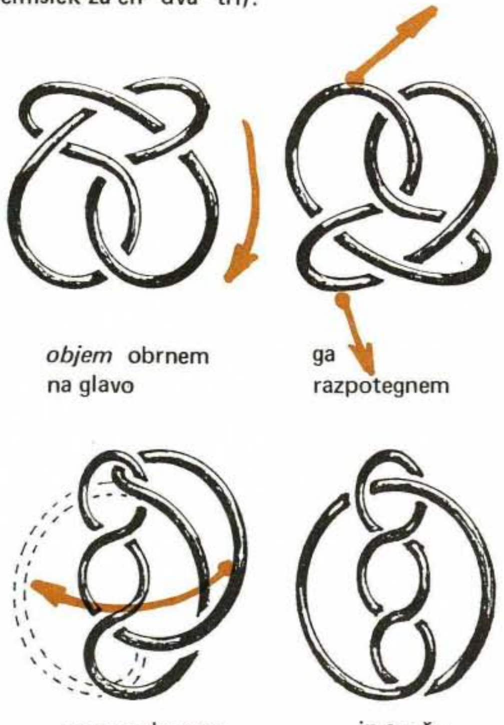
S tem spoznanjem pa smo povsem nevede trčili v eno izmed temeljnih vprašanj teorije vozlov – ali je dani vozel (v našem primeru je to *križemkraž)* tak, da ga je moč razplesti v *trivialen* vozel ali ni? Ali je torej ves ta *križemkražev* pošasten preplet le ena sama grda potegavščina in ga torej morebiti v bistvu sploh "nič ni"?

Bralec bo zlahka spoznal, če se bo odločil narediti model *križemkraža* iz vrvi, da se ta vozel sicer ne razplete v *trivialen vozel,* pač pa se ga da poenostaviti v *deteljo.* In njegova "prava" risba ima torej le tri križne točke, nikakor pa ne petdeset, kolikor smo jih sprva nekoliko lahkomiselno našteli.

Na primeru *križemkraža* smo zagotovo že vsaj intuitivno zaznali, kako lahko preoblikujemo vozle. Takole gre ta reč: dovoljeno je sleherno premikanje njihovih krivulj sem ter tja, lahko jih zvijamo tako ali drugače, tudi prevračanje in celo preobračanje vozlov je dovoljeno, le razkleniti jih pri tem nikakor ne smemo. In vsem tistim vozlom, ki jih med seboj loči zgolj postopek pravkar opisanega preoblikovanja, pravimo **izotopni vozli.**

Sedaj torej že vemo, da sta *križemkraž* in *trivialni vozel* izotopna. Da pa se udomačimo pri novem pojmu, pokažimo, da sta tudi *objem* in *sveča* s slike 5 izotopna vozla.

Bralcu najbrž ne bo težko premisliti, da imajo na risbah vsi med seboj izotopni vozli po enako število križnih točk. Obratno pa ne velja zmeraj – poglej, *petica* in *sveča* imata na svojih risbah po pet križnih točk, pa vendarle nista izotopna. Naj bralec sam premisli, zakaj ne (to pa seveda že ne bo več nezahteven premislek za en–dva–tri).

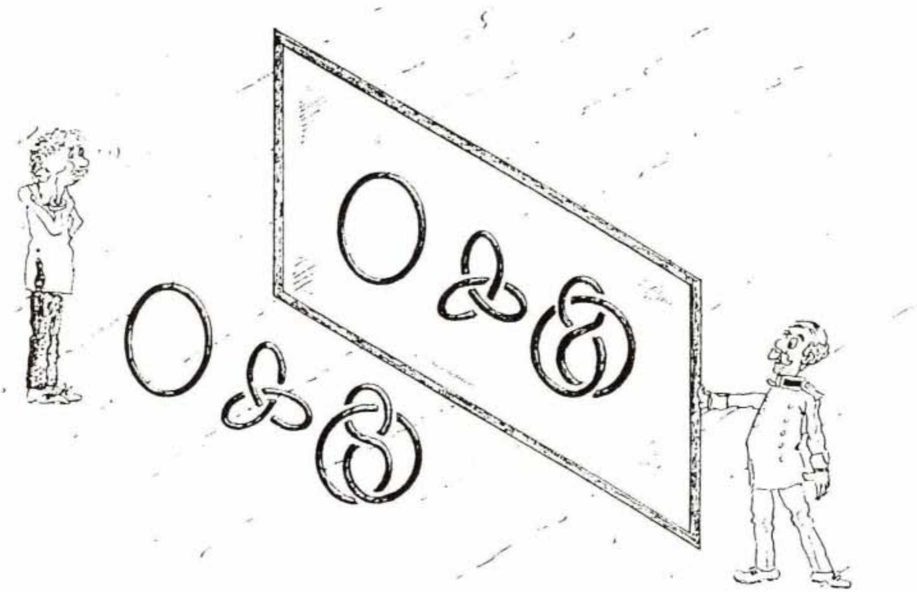


Slika 5

Postavimo sedaj trojico vozlov s slike 2 pred ogledalo.

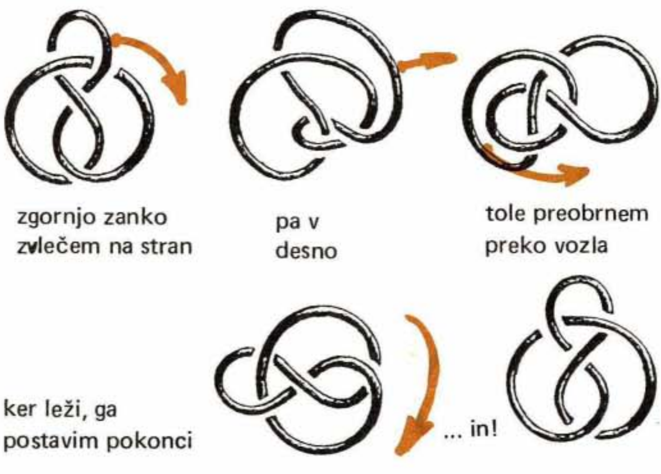
Recimo, da je vsakemu vozlu **zrcalni vozel** tisti, ki ga prikazuje njegova zrcalna slika. Tako lahko sedaj opazimo, da so zrcalne slike *osmice, detelje* in *trivialnega vozla* skorajda identično enake originalnim slikam, le "podhode" in "nadhode" v križnih točkah imajo zamenjane med seboj.

Toda videti se da še precej več. Trdim, da sta *trivialni vozel* in *osmica* celo izotopna vsak svojemu zrcalnemu vozlu! Za *trivialni vozel* je to seveda



Slika 6

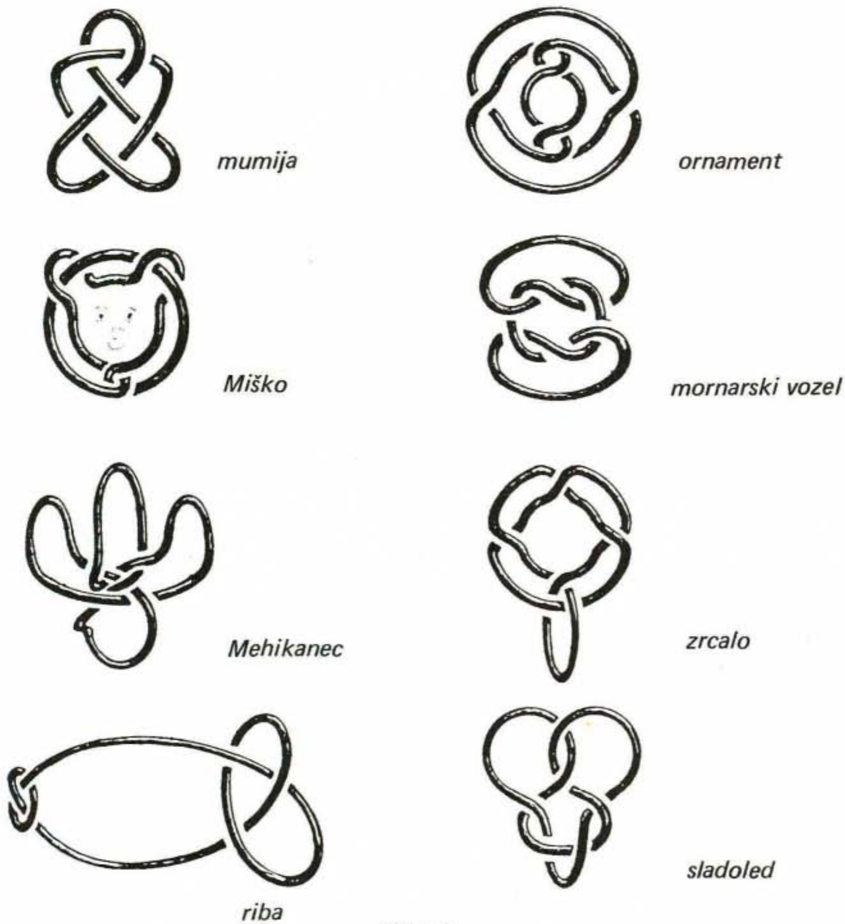
nadvse očitno, nikakor pa ne za *osmico.* A "hokus—pokus" z naslednje slike nam brž in prepričljivo prežene vsak tovrsten dvom.



Slika 7

Z zrcalno *deteljo* pa je žal čisto drugače. Nikakor ga ne bomo uspeli prevozlati nazaj v njegov original, pa naj si še tako vztrajno prizadevamo. Pomislimo, koliko trdovratno upajočih je samo odrešil nemški matematik *Dehn,* ki je že leta 1914 dokazal (po teoretični poti, seveda), da tega zares ni mogoče in da torej obstajata pač dve neizotopni *detelji.*

Najbrž pa se ljubi bralec še spominja, da smo le maloprej zapisali, da je *križemkraž* izotopen *detelji!* In po vsej priliki sedaj že čuti mučno zadrego, da smo z našo teorijo najbrž zašli. Saj nenadoma ne vemo več, kateri izmed obeh *detelj* je *križemkraž* izotopen.



Slika 8