PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 2
Strani 68–71

Boris Lavrič:

VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1

Ključne besede: matematika, teorija števil, ulomek, vsota.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/974-Lavric.pdf

MATEMATIKA

VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1

Najbrž se je marsikak vesten bralec Preseka že ob naslovu prispevka spomnil članka profesorja Ivana Vidava, ki je bil objavljen pred tremi leti v našem listu (PXIV/1). V njem je avtor dokazal, da imajo ulomki s števcem 1 naslednjo presenetljivo in lepo lastnost.

IZREK A. Vsako pozitivno racionalno številu se da zapisati kot vsota ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci. Še več, za imenovalce smemo zahtevati, da so različni in večji od naprej danega števila.

Prvi del izreka lahko povemo tudi takole: Za vsako racionalno število $r > 0$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da ima enačba

$$E_n(r): \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = r$$

z neznankami $a_1, \ldots, a_n$ vsaj eno rešitev, ki ustreza pogoju

$$P: \qquad 1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n; \;\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$$

V tem prispevku nas bodo zanimala predvsem naslednja vprašanja:

(A) Ali ima enačba $E_n(r)$ pri danem racionalnem $r > 0$ za vsak naraven $n > 1$ rešitev, ki ustreza pogoju P?

(B) Je vseh takšnih rešitev pri danih $r > 0$ in $n > 1$ končno mnogo?

(C) Kako je število rešitev pri danem $r > 0$ odvisno od n?

Da ne bomo po nepotrebnem izgubljali besed, zaznamujmo z $R_n(r)$ število vseh rešitev enačbe $E_n(r)$, ki izpolnjujejo pogoj P. Dogovorimo se še, da bomo rešitvi, ki zadošča pogoju P, rekli *dobra rešitev.*

Pozabavajmo se zdaj z nalogo (A).

Vzemimo najprej $r = 1$. Brž lahko ugotovimo, da je $R_2(1) = 0$, saj velja ocena

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$$

Odgovor na vprašanje (A) je torej že pri $r = 1$ negativen, naloga pa je tako rešena za $r = 1$. Vendar bomo ostali še naprej zvedavi: je morda $R_3(1) > 0$? Za razvedrilo naj bralec sam poišče vse rešitve enačb $E_3(1)$ in $E_4(1)$, ki zadoščajo pogoju P. Najde jih tudi na strani 118.

Prav hitro vidimo, da velja $R_n(1) > 0$ celo za vsak $n > 2$. Kasneje bomo dokazali, da je podobno tudi pri ostalih racionalnih številih $r > 0$. Pri $r < 1$ se lahko zgodi, da je že $R_2(r) > 0$, pri velikem r pa enačba $E_n(r)$ za naravna števila $n \leqslant 2r$ nima nobene rešitve. Slednje nam potrdi ocena

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \leqslant r$$

Izrek A nam zagotavlja, da je $R_n(r) > 0$ za neskončno mnogo naravnih števili n. Pred podrobnejšo obravnavo odvisnosti števila rešitev $R_n(r)$ od n pa se lotimo še vprašanja (B). Odgovor nanj je pozitiven.

Dokazali bomo, da velja naslednji

IZREK B. Naj bo r pozitivno racionalno število in $n \in \mathbb{N}$. Potem ima enačba $E_n(r)$ ali končno mnogo dobrih rešitev ali pa nobene.

Pri dokazu uporabimo matematično indukcijo glede na število neznank v enačbah.

Za $n = 1$ izrek očitno velja pri vsakem $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Tedaj je namreč $R_1(r) = 0$ ali $R_1(r) = 1$.

Predpostavimo zdaj, da izrek velja za $n = k \in \mathbb{N}$ in vsak racionalen $r > 0$. Razmislimo o številu rešitev enačbe $E_{k+1}(r)$, kjer je $r > 0$ dano racionalno število. Za vsako dobro rešitev $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ enačbe $E_{k+1}(r)$ velja ocena

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k+1}} < \frac{k+1}{a_1}$$

Torej je $a_1 < (k+1)/r$, poleg tega pa števila $a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$ rešijo enačbo $E_k(r-1/a_1)$. Po predpostavki ima ta le končno mnogo dobrih rešitev (ali nobene), zato je število dobrih rešitev enačbe $E_{k+1}(r)$ pri izbranem naravnem številu $a_1 > 1$ končno. Za a_1 imamo po oceni $a_1 < (k+1)/r$ na voljo le končno mnogo števil, torej je tudi število vseh rešitev enačbe $E_{k+1}(r)$, ki izpolnjujejo pogoj P, končno.

Indukcijski korak smo dokazali, s tem pa potrdili veljavnost izreka.

Na vrsti je problem (C).

Naj bo r dano pozitivno racionalno število. Splošna formula $R_n(r)$, $n \in \mathbb{N}$, je pretežak zalogaj, zato nas bodo zanimale bolj grobe (a vendar lepe) lastnosti zaporedja

$$R_1(r), R_2(r), R_3(r), \ldots$$

Po izreku A ne morejo biti vsi členi tega zaporedja enaki nič. Označimo z m najmanjše naravno število, pri katerem je $R_m(r) > 0$.

Tako na primer za $r = 1$ dobimo $m = 3$, za $r = 5/4$ pa $m = 4$.

Kaj hitro lahko doženemo, da tudi pri vseh $n > m$ velja ocena $R_n(r) > 0$. Če je namreč $R_k(r) > 0, k > 1$,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} = r, \; 1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$$

potem z razdružitvijo ulomka $\frac{1}{a_k}$ dobimo

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k + 1} + \frac{1}{a_k (a_k + 1)} = r$$

in $a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k + 1 < a_k(a_k + 1)$, torej velja ocena $R_{k+1}(r) > 0$. Odtod takoj sledi, da je res $R_n(r) > 0$ za vsak $n \geqslant m$.

Videli smo, da ima vsaka enačba $E_n(r)$ pri $n \geqslant m$ vsaj eno dobro rešitev. To ugotovitev pa lahko še precej izboljšamo. Dokazali bomo, da velja takle

IZREK C. Za vsako pozitivno racionalno število r velja $R_{n+1}(r) > R_n(r)$ za vsak $n > m$.

Dokažimo navedeni izrek. Naj bo $0 < r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ in $R_n(r) > 0$. Vzemimo katerokoli dobro rešitev $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ enačbe $E_n(r)$ in iz nje tvorimo rešitev

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1, a_n(a_n + 1)$$

enačbe $E_{n+1}(r)$. Različnima rešitvama enačbe $E_n(r)$ smo tako priredili različni rešitvi enačbe $E_{n+1}(r)$ (Preveri!), torej vedno velja ocena

$$R_{n+1}(r) \geqslant R_n(r)$$

Vzemimo zdaj poljuben $n > m$ in dokažimo, da tedaj obstaja taka rešitev $a_1, \ldots, a_n$ enačbe $E_n(r)$, ki ustreza pogoju P in ima za a_n sodo število.

Res, enačba $E_{n-1}(r)$ ima zaradi $n - 1 \geqslant m$ vsaj eno dobro rešitev, iz nje pa na enak način kot prej pridelamo rešitev enačbe $E_n(r)$, katere zadnji člen je sodo število $a_{n-1}(a_{n-1} + 1)$.

Po prejšnjem smemo pri $n > m$ privzeti, da je v eni od rešitev $a_1, \ldots, a_n$ enačbe $E_n(r)$ število $a_n = 2p$ sodo. Očitno velja še $p > 1$, kar nam zagotavlja, da sta desni strani enakosti

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{3p} + \frac{1}{6p}$$

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p(2p+1)}$$

različni. Torej lahko prej dobljenim $R_n(r)$ rešitvam enačbe $E_{n+1}(r)$, ki zadoščajo pogoju P, pridružimo še rešitev

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 3p, 6p$$

ki se očitno razlikuje od vseh ostalih. Potemtakem za $n > m$ res velja $R_{n+1}(r) > R_n(r)$, prav to pa smo želeli dokazati.

Izrek C nam da naslednjo oceno za število dobrih rešitev enačbe $E_n(r)$:

$$R_{m+k}(r) \geqslant k \quad \text{za vsak } k \in \mathbb{N}$$

To oceno se da še izboljšati, a naj kljub temu sklenemo prispevek – seveda z nalogami.

1. Dokaži, da je pri $r = 5/6$ $R_2(r) = R_3(r) = 1$ in poišči vsaj deset dobrih rešitev enačbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{6}, \quad x < y < z < t$$

2. Določi $R_2(1/k)$ za $k = 2, 3, 4, 5$ in 6.
3. Naj bo $1 < k \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je $R_2(1/k) \geqslant 1$, enakost $R_2(1/k) = 1$ pa velja natanko takrat, kadar je k praštevilo.
4. Za vsako naravno število $k > 4$ ima enačba

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2k}, \quad x < y$$

vsaj štiri dobre rešitve. Katere?
5. Dokaži, da za vsako liho število $k > 1$ velja $R_2(2/k) > 0$.

Rešitve nalog najdete na strani 118.

Boris Lavrič

VSOTE ULOMKOV S ŠTEVCEM 1 – Rešitve s strani 68

Najprej odgovorimo na vprašanje v tekstu članka (str. 68).

Enačba $E_3(1)$ ima le rešitev $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6$, ki zadošča pogoju P. Enačba $E_4(1)$ ima naslednje dobre rešitve:

$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 42$
$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 24$
$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 18$
$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = 15$
$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 20$
$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 12$

1. Enačba $E_2(5/6)$ ima le rešitev $a_1 = 2, a_2 = 3$, ki ustreza pogoju P, enačbo $E_3(5/6)$ pa lahko obravnavamo takole: Zaradi ocene

$$\frac{3}{a_1} > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6}$$

velja $a_1 \leqslant 3$, torej $a_1 \in$ 2, 3 . Če je $a_1 = 2$, dobimo

$$\frac{2}{a_2} > \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{3}$$

odkoder sledi $a_2 \in$ 3, 4, 5 . Od vseh treh možnosti za a_2 je v tem primeru dobra le $a_2 = 4$. Če pa je $a_1 = 3$, na podoben način kot prej vidimo, da velja $a_2 < 4$, kar pa za dobro rešitev ni mogoče. Torej je $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 12$ edina dobra rešitev enačbe $E_3(5/6)$. Z njeno pomočjo lahko konstruiramo rešitve enačbe $E_4(5/6)$. Nekaj jih zabeležimo v naslednjo preglednico

x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t
2	4	13	156	2	4	20	30	2	5	12	20
2	4	14	84	2	4	21	28	2	6	7	42
2	4	15	60	2	5	8	120	2	6	8	24
2	4	16	48	2	5	9	45	2	6	9	18
2	4	18	36	2	5	10	30	2	6	10	15

2. Odgovor: $R_2(1/2) = R_2(1/3) = R_2(1/5) = 1$,, $R_2(1/4) = 2$, $R_4(1/6) = 4$.

3. Enačbo $E_2(1/k)$, $1 < k \in \mathbb{N}$, vedno reši par