PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 1
Strani 2–5

Peter Legiša:

ARHIMED

Ključne besede: matematika, zgodovina matematike, prostornina krogle.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/966-Legisa.pdf

ARHIMED

Pred kratkim je minilo 2200 let od smrti velikega grškega matematika Arhimeda. Živel je v Sirakuzah na Siciliji. Mesto je bilo grška kolonija in je imelo stike z drugimi grškimi naselbinami ob Sredozemlju. Arhimed je bil vsaj enkrat v Egiptu in si je dopisoval z matematiki v Aleksandriji, ki je bila takrat najmočnejše matematično središče na svetu.

Arhimed je znan po delih iz matematike in mehanike. Posebej omenimo mehaniko tekočin. Znana je anekdota o tem, kako je Arhimed rešil problem zlatega venca. Kralj v Sirakuzah je namreč dal delati venec v posvetitev bogovom in je zanj dal ustrezno količino zlata. Ko pa je bil izdelek končan, so se razširile govorice, da je obrtnik del zlata zamenjal s srebrom. Kralj je prosil Arhimeda, naj ugotovi resnico. Medtem ko je premišljeval o problemu, se je Arhimed šel kopat. Ko je stopil v polno kad, je opazil, da se voda v kadi tem bolj razliva, čim bolj se je spuščal vanjo. Posvetilo se mu je, da lahko na ta način določi prostornino kovine v vencu in s tem gostoto (masa je bila znana). Navdušen nad odkritjem je skočil iz kadi in gol tekel domov, vpijoč "Eureka, eureka!" (Odkril sem!). Tudi danes določamo gostoto rudnin tako, da jih stehtamo in izmerimo, koliko tekočine izpodrinejo iz posebne posodice, imenovane piknometer.

Včasih to anekdoto povezujejo z Arhimedovim zakonom, da je v tekočino potopljeno telo za toliko lažje, kolikor je teža izpodrinjene tekočine (= sila vzgona). Manj znano je, da se je Arhimed ukvarjal tudi s stabilnostjo plavajočih objektov. Dobil je zelo lepe rezultate za telesa posebne oblike (odseke rotacijskega paraboloida, se pravi telesa, katerih površje je enako parabolični anteni, spredaj zaprti z ravno ploščo). To je bil izreden dosežek, če upoštevamo takratna sredstva. Kot vemo, je stabilnost ladij lahko še danes problem. Spomnimo se nedavne tragedije trajekta v Rokavskem prelivu, ki se je prevrnil na mirnem morju pri običajnem manevru.

Občudovanja vredni so tudi Arhimedovi matematični dosežki. Povezani so predvsem z merjenjem v geometriji. S primerjanjem obsegov krogu s premerom d včrtanih in očrtanih večkotnikov je Arhimed ugotovil za obseg o kroga:

$$3\tfrac{10}{71}d < o < 3\tfrac{1}{7}d$$

Če označimo $o = \pi d$, je torej

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}$$

ali

$$3{\cdot}1408\ldots < \pi < 3{\cdot}1428\ldots$$

Izračunal je tudi ploščino paraboličnih odsekov, prostornino in površino krogle in še mnogo drugega.

Leta 214 pr.n.št. so Rimljani začeli oblegati Sirakuze. Arhimed je s svojim tehničnim znanjem pomagal uničevati oblegalne naprave in si tako pridobil spoštovanje nasprotnika. Ko je leto 212 pr.n.št. mesto le bilo premagano, je rimski poveljnik izrecno ukazal, naj Arhimedu prizanesejo. Zgodba pravi, da rimski vojak ni imel potrpljenja s starcem, ki se je oklepal svojih instrumentov in govoril: "Noli tangere circulos meos!" (Ne dotikaj se mojih krogov). Velikega matematika je ubil.

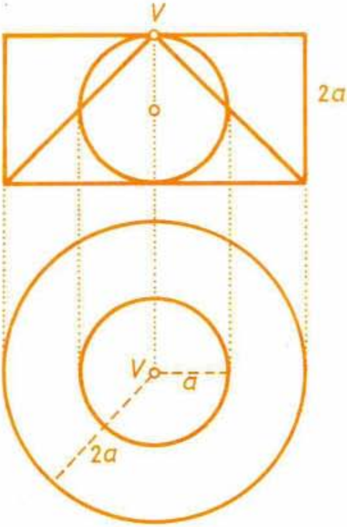
Kljub veliki slavi, ki jo je Arhimed užival še v času svojega življenja, njegovo delo v antiki ni imelo pravega odmeva ali nadaljevanja. Nakazovalo je novo smer v matematičnem raziskovanju, ki se je počasi začela razvijati šele več stoletij kasneje in je pripeljala do tako imenovane višje matematike.

Ponovno je Arhimed postal popularen v Bizancu v času cesarja Justinijana. Graditelja cerkve Hagia Sofia sta vodila tudi matematično šolo, v kateri so zbirali in preučevali Arhimedove spise. Več rokopisov je od tod v začetku našega tisočletja prišlo na Sicilijo. Po padcu sicilskega kraljestva v 13. stoletju so tako imenovana kodeksa A in B prenesli v Italijo, kjer sta zamenjala več lastnikov. Okrog leta 1500 je bil kodeks A prodan za 800 zlatnikov, kakih šestdeset let kasneje pa se je za njim izgubila vsaka sled. Na srečo so obstajali številni prevodi in prepisi, resda z neogibnimi napakami. Kodeks B pa je danes v Vatikanski knjižnici.

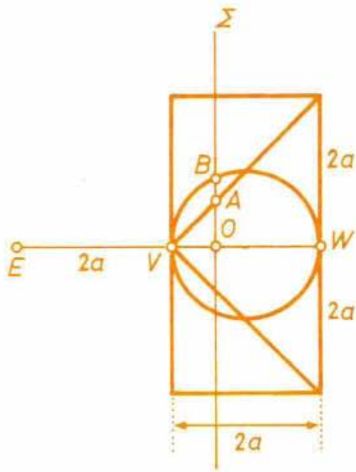
Leta 1899 pa je prišlo do presenetljivega odkritja. V Samostanu svetega groba v Jeruzalemu so odkrili matematični rokopis iz desetega stoletja, ki je bil delno izbrisan (čezenj pa napisano drugo besedilo). Izkazalo se je, da gre za Arhimedova dela, med njimi pa so bila tudi taka, za katera so mislili, da so že davno izgubljena. Eno od njih nosi naslov *Metoda* in opisuje, kako s sredstvi iz mehanike (težišče itd.) lahko dobimo matematične rezultate. Oglejmo si, kako je Arhimed s to metodo izračunal prostornino krogle. Z njegovimi lastnimi besedami:

Prostornina krogle je štirikratna prostornina stožca, ki ima osnovno ploskev enako največjemu krogu na krogli in višino enako polmeru krogle. Prostornina valja, ki ima osnovno ploskev enako največjemu krogu na krogli in višino enako premeru krogle, je ena in polkrat prostornina krogle.

Arhimedova mehanična pot do tega rezultata gre takole. Na sliki 1 imamo tloris in naris valja s polmerom 2 a in višino 2 a. V ta valj včrtamo stožec, ki ima isto spodnjo osnovno ploskev, vrh V pa v središču zgornje osnovne ploskve. V valj včrtamo še kroglo s polmerom a, ki se dotika gornje osnovne ploskve v točki V. Na sliki 2 imamo stanje obrnjeno za 90^0.



Slika 1



Slika 2

Vzemimo ravnino Σ, vzporedno osnovni ploskvi valja (slika 2). Presek te ravnine s kroglo je krog s polmerom $q = |OB|$, s stožcem pa krog s polmerom $u = |OA|$ in z valjem krog s polmerom $2a$. Ker je kot AVO enak 45^0, je $|OV| = |OA|$. Tako je

$$q^2 + u^2 = |OB|^2 + |OV|^2 = |VB|^2$$

Trikotnik VBW je pravokoten (kot v polkrogu), zato je po Evklidovem izreku

$$|VB|^2 = |VO|\,|VW| = |VO|\,.\,2a$$

Od tod je

$$|VO|\,.(2a)^2 = (2a)(q^2 + u^2)$$

Pomnožimo s π:

$$|VO|\,.\pi \quad (2a)^2 = (2a)(\pi q^2 + \pi u^2)$$

Mislimo si zdaj, da naša ravnina ni prava ravnina, ampak je narejena iz izredno tanke pločevine. Predstavljajmo si še, da imamo na naši sliki tehtnico z vzvodoma EV in VW dolžine $2a$ ter z vodoravno osjo, ki se na naši sliki projicira v točko V. Zgornja enačba pove, da presek naše pločevine z valjem ravno uravnovesi pločevinasta kroga s polmeroma q in u, obešena v točki E na tehtnici. Mislimo si zdaj, da je naš valj sestavljen iz samih takih pločevinastih krogov vzporednih osnovni ploskvi. Potem je jasno, da valj, nataknjen na tehtnico kot