PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 6
Stran 331

Boris Lavrič:

ERFURT 1989

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/1005-Lavric-Erfurt.pdf

NALOGE

ERFURT 1989

Kljub obilici nalog z domačih matematičnih tekmovanj si spet (glej *Vzorec iz Moskve* – P3) privoščimo pogled v tujino. Izbrali smo pet nalog, ki so jih desetošolci iz Nemške demokratične republike reševali maja 1989 na zveznem tekmovanju v Erfurtu.

1. Dokaži, da je število $2^8 + 2^{11} + 2^n$ popolni kvadrat le za en $n \in \mathbb{N}$ in določi ta n.

2. Utemelji, da enačba $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$ nima nobene realne rešitve.

3. Poišči realni funkciji f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (definirani za vsak $x \in \mathbb{R}$), ki izpolnjujeta pogoja
   a. $f(0) = 7$,
   b. $g(x) \cdot f(x+1)/f(x) = g(2x) + 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$

4. Trinajst točk ravnine tvori množico M, ki ustreza naslednjemu pogoju: Če vzamemo poljubne tri točke iz M, sta vsaj dve (od teh) med seboj oddaljeni manj kot 1 cm.

   a. Dokaži, da obstaja tak krog s polmerom 1 cm, da v njem leži vsaj sedem točk iz M.

   b. Ali je mogoče dokazati, da obstaja tak krog s polmerom 1 cm, ki vsebuje osem točk iz M ?

5. Dokaži, da za vsako četvorko (a,b,c,d) pozitivnih realnih števil, ki ustrezajo pogoju
$$a + b + c = d\sqrt{3}/2$$
obstaja taka trojka (x,y,z) realnih števil, ki reši sistem enačb
$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

Boris Lavrič

ERFURT 1989 – Rešitve nalog s str. 331

1. Označimo število $2^8 + 2^{11} + 2^n$ z m in vzemimo najprej $n \leq 8$. Potem je

$$m = 2^n(2^{8-n} + 2^{11-n} + 1) = 2^n(9 \cdot 2^{8-n} + 1)$$

od koder preberemo, da za lihi n število m ne more biti popolni kvadrat (faktor 2^n), za sodi n (torej za $n \in 2,4,6,8$) pa m tudi ni kvadrat naravnega števila.

Naj bo zdaj $n>8$. Potem je $m = 2^8(9+2n-8)$ popolni kvadrat natanko takrat, kadar obstaja tako naravno število p, da velja

$$2^k + 9 = p^2,\ k = n - 8 \in \mathbb{N}$$

Potem pa je $(p-3)(p+3) = 2^k$ in zato

$$p = 2^{k_1} + 3 = 2^{k_2} - 3,\ k_1, k_2 \in 0 \cup \mathbb{N}$$

Od tod sledi enakost

$$6 = 2^{k_2} - 2^{k_1} = 2^{k_1}(2^{k_2-k_1} - 1),\ k_1 < k_2$$

ki nam da $k_1 \in \{0,1\}$ ter navsezadnje edino dobro možnost $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Tedaj je $p = 5$, $k = 4$, torej je m popolni kvadrat le za $n = 12$.

2. Razčlenimo levo stran enačbe pa bo dokaz pred nami:

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = x^2(x-3)^2 + x^2 + 4((x-3)^2 + 1) =$$
$$= x^2((x-3)^2 + 1) + 4((x-3)^2 + 1) = (x^2 + 4)((x-3)^2 + 1) > 4$$

3. Vzemimo za g konstantno funkcijo $g(x) = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Potem mora f izpolnjevati pogoja

$$f(0) = 7 \text{ in } \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}$$

Tvegajmo z nastavkom za eksponentno funkcijo

$$f(x) = c \cdot a^x,\ c \in \mathbb{R},\ a > 0$$

ki nam takoj da rešitev $c = 7$, $a = 2$, torej $f(x) = 7 \cdot 2^x$.

4. Denimo, da sta poljubni dve točki iz M oddaljeni manj kot **1** cm. Potem v vsakem krogu s središčem v eni izmed teh točk in s polmerom **1** cm ležijo vse točke množice M. Ostane nam še primer, ko sta dve točki iz M oddaljeni vsaj **1** cm. Označimo ti dve točki z A in B. Potem je zaradi pogoja naloge vsaka druga točka iz M oddaljena manj kot **1** cm bodisi od A bodisi od B, torej vsaj eden od krogov s središčem v A ali B in s polmerom 1 cm vsebuje vsaj sedem točk množice M. S tem smo dokazali a), odgovor na b) pa je negativen, kar pokaže slika na naslednji strani.