PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 5
Strani 258–262

Ivan Vidav:

REŠITEV ENAČBE $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Ključne besede: matematika, reševanje enačb, desetiški sestav, rekreacijska matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/1001-Vidav.pdf

REŠITVE ENAČBE $x^3 + y^3 + 1 = xyz$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Zastavimo si tole vprašanje: Za katere pare naravnih števil x in y je vsota $x^2 + y^2 + 1$ deljiva s produktom xy? Če zaznamujemo kvocient med vsoto in produktom z z, zadoščajo x, y, z enačbi

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz \tag{1}$$

Poiščimo vse njene rešitve v naravnih številih!

Ali obstaja rešitev, pri kateri sta x in y enaka? Če je $x = y$, se enačba (1) glasi $2x^2 + 1 = x^2 z$. Od tod je $x^2(z - 2) = 1$. Produkt naravnih števil pa je enak 1 le, če so vsi faktorji enaki 1. Torej je $x = 1$ in $z - 2 = 1$. Tako dobimo rešitev $x = y = 1$, $z = 3$, ki ji bomo rekli **trivialna rešitev enačbe** (1). V vsaki nevtralni rešitvi pa je $x \neq y$.

Naj bodo x, y, z naravna števila, ki zadoščajo enačbi (1). Če prenesemo člen x^2 z leve na desno in nato delimo z x, dobimo

$$\frac{y^2 + 1}{x} = yz - x \tag{2}$$

Vidimo, da je kvocient $(y^2 + 1)/x$ celo število $yz - x$. Prav tako ugotovimo, da je kvocient $(x^2 + 1)/y$ celo število, in sicer enako $xz - y$.

Postavimo

$$x' = y, \quad y' = \frac{y^2 + 1}{x}, \quad z' = z \tag{3}$$

x', y', z' so naravna števila. Izračunajmo

$$x'^2 + y'^2 + 1 = \frac{y^2 + 1}{x^2}(x^2 + y^2 + 1)$$

Upoštevajmo, da x, y, z zadoščajo enačbi (1), pa dobimo

$$x'^2 + y'^2 + 1 = x'y'z'$$

Torej je tudi trojka x', y', z' rešitev enačbe (1) v naravnih številih.

Če izhajamo iz trivialne rešitve $x = y = 1$, $z = 3$, dobimo po formulah (3) rešitev $x = 1, y = 2, z = 3$, iz te rešitev $x = 2, y = 5, z = 3$ itd.

Enačba (1) se ne spremeni, če v njej zamenjamo x in y. Zato je tudi trojka

$$x' = \frac{x^2 + 1}{y}, \quad y' = x, \quad z' = z \tag{4}$$

rešitev v naravnih številih, če je x, y, z taka rešitev. Trojko (4) smo namreč dobili tako, da smo v formulah (3) zamenjali x in y, x' pa z y'.

Denimo, da je x manjši kakor y, tedaj $y - x > 0$. Potem velja za rešitev (3)

$$y' - x' = \frac{y^2 + 1}{x} - y = \frac{y(y - x) + 1}{x} > 0$$

Torej je tudi $x' < y'$. Ker je $x < y = x'$, je x' večji od x, y' pa večji od y.

Kako je pri rešitvi (4)? Tu imamo

$$y' - x' = x - \frac{x^2 + 1}{y} = \frac{x(y - x) - 1}{y}$$

Produkt $x(y - x)$ naravnih števil x in $y - x$ je najmanj 1, enak 1 pa je le v primeru, ko je $x = 1$ in $y - x = 1$, tedaj $y = 2$. Iz rešitve $x = 1$, $y = 2$ dobimo trivialno rešitev $x' = 1$, $y' = 1$. V vseh drugih primerih pa je $x' < y'$. To namreč pove zgornja enakost. Ker je $y' = x < y$, je nova rešitev manjša od prejšnje.

Imejmo rešitev, pri kateri je $x < y$. Formule (3) ji priredijo večjo rešitev x', y', tej pa še večjo x'', y''. Če tako nadaljujemo, dobimo neskončno zaporedje rešitev, v katerem je vsaka naslednja večja od prejšnje. Če pa računamo po formulah (4), se zaporedne rešitve nekaj časa manjšajo. Ker so naravna števila, se mora manjšanje po nekaj korakih končati. V prejšnjem odstavku smo videli, da se konča tedaj, ko pridemo do trivialne rešitve. Od tam naprej se rešitve spet večajo.

Če je $x > y$, dajo naraščajoče zaporedje rešitev formule (4), rešitve dobljene s formulami (3) pa se manjšajo toliko časa, dokler ne pridemo do trivialne rešitve.

Vse rešitve, ki jih dobimo iz začetne rešitve po formulah (3) ali po formulah (4), imajo isti z. Pri trivialni rešitvi pa je $z = 3$. Ker nas formule (4) po nekaj korakih vselej privedejo do trivialne rešitve, kadar je $x < y$, formule (3) pa, kadar je $x > y$, je torej $z = 3$ v vsaki rešitvi enačbe (1) v naravnih številih. Tako smo dokazali trditev:

Če sta x in y taki naravni števili, da je vsota $x^2 + y^2 + 1$ deljiva s produktom xy, je kvocient enak 3.

Ker je vselej $z = 3$, je dovolj, če v rešitvi enačbe (1) v naravnih številih navedemo le x in y.

Formule (3) priredijo rešitvi x, y rešitev x', y'. Poiščimo zdaj rešitev x'', y'', ki pripada rešitvi x', y' po formulah (4). Dobimo

$$x'' = \frac{x'^2 + 1}{y'} = (y^2 + 1) \cdot \frac{x}{y^2 + 1} = x, \quad y'' = x' = y$$

Torej nas formule (4) privedejo nazaj na prvotno rešitev x, y. Prav tako dobimo prvotno rešitev, če poiščemo najprej novo rešitev po formulah (4), tej pa potem rešitev po formulah (3).

Naj bo dana poljubna rešitev x, y enačbe (1), kjer je $x < y$. Videli smo, da pridemo z uporabo formul (4) po nekaj korakih do trivialne rešitve $x = 1$, $y = 1$. V prejšnjem odstavku smo ugotovili, da delujejo formule (3) v nasprotni smeri kakor (4). Zato nas po istem številu korakov privedejo od trivialne rešitve nazaj na dano rešitev x, y. Kadar pa je $x > y$, pridemo do trivialne rešitve s formulami (3), od trivialne rešitve do dane rešitve pa nas privedejo formule (4). Tako smo ugotovili, da dobimo iz trivialne rešitve katerokoli rešitev enačbe (1) z uporabo formul (3) ali pa (4).

Izračunali smo, da je kvocient $(y^2 + 1)/x$ enak $yz - x$. Ker je $z = 3$ v vsaki rešitvi enačbe (1) v naravnih številih, lahko zapišemo formule (3) tudi takole

$$x' = y, \quad y' = 3y - x, \quad z' = z \tag{3★}$$

Novi x' je enak prejšnjemu y. Zato se dajo dobiti vse rešitve enačbe (1) iz enega samega zaporedja števil. Oglejmo si namreč zaporedje

$$u_0, u_1, u_2, \ldots \tag{5}$$

pri katerem sta prva člena

$$u_0 = 1 \quad \text{in} \quad u_1 = 1$$

trije poljubni zaporedni členi u_{n-1}, u_n, u_{n+1} pa so med seboj povezani z enačbo

$$u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} \tag{6}$$

S tem je zaporedje (5) določeno. Tako je po formuli (6)

$$u_2 = 3u_1 - u_0 = 2, \quad u_3 = 3u_2 - u_1 = 5, \text{ itd.}$$

Očitno so vsi členi u_n naravna števila.

Velja tale trditev: Poljubna sosedna člena $u_{n-1} = x$ in $u_n = y$ zaporedja (5) dasta rešitev enačbe (1) v naravnih številih. Res, začetna člena $u_0 = 1$ in $u_1 = 1$ določata trivialno rešitev. Denimo, da za neki indeks n velja naša trditev, da je torej $x = u_{n-1}$, $y = u_n$ rešitev. Po formulah (3★) dobimo iz nje rešitev $x' = y = u_n$ in $y' = 3y - x = 3u_n - u_{n-1}$. Ker velja zveza (6), je $y' = u_{n+1}$. Zato tudi naslednji par zaporednih členov $u_n = x'$ in $u_{n+1} = y'$ zadošča enačbi. Po indukciji sklepamo, da je vsak par sosednih členov rešitev enačbe (1). Ker določata začetna člena trivialno rešitev in dobimo iz rešitve $x = u_{n-1}$, $y = u_n$ rešitev $x' = u_n$, $y' = u_{n+1}$ po formulah (3★), te formule pa nas privedejo do vsake rešitve, pri kateri je $x < y$, so v zaporedju (5) zajete vse take rešitve.

Iz (6) dobimo

$$u_{n-1} = 3u_n - u_{n+1} \tag{6★}$$

Ta formula omogoča računanje členov zaporedja (5) z desne proti levi. Z njo lahko opredelimo tudi člene u_n z negativnimi indeksi n. Tako je

$$u_{-1} = 3u_0 - u_1 = 2, \quad u_{-2} = 3u_{-1} - u_0 = 5 \text{ itd.}$$

Členi so ista števila kakor pri pozitivnih indeksih, sledijo pa si v nasprotnem vrstnem redu.

Zaporedje u_n se zdaj razteza v obe smeri v neskončnost. Glasi se

$$\ldots, 89, 34, 13, 5, 2, 1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, \ldots \tag{7}$$

V sredi sta člena $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, ki določata trivialno rešitev. Zaporedna člena $u_{n-1} = x$ in $u_n = y$ na desni strani dasta rešitev, pri kateri je $x < y$, na levi strani pa rešitev, kjer je $x > y$. V zaporedju (7) so tako zajete prav vse rešitve enačbe (1) v naravnih številih. Nadaljnje člene na desni računamo po formuli (6), na levi pa po formuli (6★).

Na koncu si oglejmo še podobno enačbo

$$x^3 + y^3 + 1 = xyz \tag{8}$$

Tudi tu nas zanimajo rešitve v naravnih številih x, y, z. Trivialna rešitev je spet $x = y = 1$, $z = 3$. Iz dane rešitve x, y, z pridemo do novih rešitev s podobnimi formulami, kakor so (3) in (4). Če prenesemo člen x^3 z leve na desno in nato delimo enačbo z x, ugotovimo, da je kvocient $(y^3 + 1)/x$ enak celemu številu $yz - x^2$. Zato so

$$x' = y, \quad y' = \frac{y^3 + 1}{x}, \; z' = yz^2 - xy^2 - x^2 z \tag{9}$$

cela števila. Nekoliko dolgovezen račun pokaže, da zadoščajo enačbi (8), torej dajo novo rešitev v naravnih številih. Prav tako dobimo novo rešitev, če v (9) zamenjamo x in y, torej postavimo

$$x' = \frac{x^3 + 1}{y}, \quad y' = x, \quad z' = xz^2 - x^2 y - y^2 z \tag{9★}$$

Iz trivialne rešitve pridemo po formulah (9) najprej do rešitve $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$, nato do rešitve $x = 2$, $y = 9$, $z = 41$ itd. Formule (9★) pa dajo iz trivialne rešitve enake rešitve kakor (9), le da sta v njih zamenjana x in y.

Ker je tudi tu novi x enak prejšnjemu y, lahko sestavimo zaporedje

$$\ldots, 365, 9, 2, 1, 1, 2, 9, 365, \ldots \tag{10}$$

Dva poljubna sosedna člena $x = u_{n-1}$ in $y = u_n$ dasta rešitev enačbe (8) v naravnih številih. S pikami označene člene na desni računamo po formulah (9), na levi po formulah (9★). Zato velja med tremi zaporednimi členi zveza

$$u_{n-1}\, u_{n+1} = u_n{}^3 + 1 \tag{11}$$