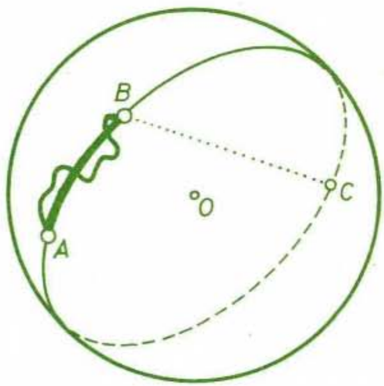
BLIŽE K RAZDALJI

Ko govorimo o razdalji med dvema krajema na Zemlji, navadno mislimo s tem dolžino najkrajše prometne poti, ki ju povezuje (kraja pri tem nadomestimo z določenima točkama). A ne vedno. Dobro vemo, da obstajajo bližnjice, pri iskanju teoretično najkrajše poti pa se za hip pomudimo ob pojmu zračna razdalja. Zaradi enostavnosti privzemimo, da ima Zemlja obliko krogle. Potem je *zračna razdalja* med dvema točkama (krajema) na njej dolžina najkrajše poti, ki ju veže in leži na površju krogle. Torej je to dolžina krajšega od obeh lokov, na katera razdelita točki glavni krogelni krog ★, ki poteka skoznju. Zračna razdalja je seveda največkrat krajša od "prometne", ni pa najkrajša mogoča razdalja. Če sta kraja daleč narazen, brž opazimo, da bi raven predor skozi Zemljo meril dosti manj kot zračna razdalja med njima. V slednjem primeru smo za razdaljo med točkama vzeli dolžino daljice, ki ju veže. S tem smo že na tretji način opredelili razdaljo. Vsakič smo (nasploh) namerili različno dolžino, čeprav smo v vseh treh primerih iskali najkrajšo pot. Različnost je posledica različnih prostorov, po katerih smo smeli potovati. V prvem primeru smo se gibali le po prometnih poteh, v drugem po vsem površju krogle, v tretjem pa povsod.



Zaznamujmo z $\mathcal{M}$ množico točk v prostoru in povzemimo povedano v bolj splošno opredelitev.

Razdalja v $\mathcal{M}$ (ali *notranja razdalja*) med točkama A in B množice $\mathcal{M}$ je dolžina najkrajše poti od A do B, ki v celoti poteka po množici $\mathcal{M}$. Označimo jo z $d_{\mathcal{M}}(A, B)$. Če je $\mathcal{M}$ ves prostor, znak poenostavimo in pišemo le $d(A,B)$.

Pot v $\mathcal{M}$ lahko ponazorimo s sledjo točke, ki se giblje po množici $\mathcal{M}$, ali z nepretrgano vrvico, položeno v $\mathcal{M}$ – dolžina poti je tedaj dolžina napete ne-

---

★ Glavni krogelni krog je presek površja krogle z ravnino, ki gre skozi središče krogle.

raztegljive vrvice.

Za množiio $\mathcal{M}$ je seveda smiselno zahtevati, da je iz enega kosa, še bolje pa, da sta poljubni dve točki iz $\mathcal{M}$ povezani s potjo, ki ima končno dolžino in poteka po $\mathcal{M}$.

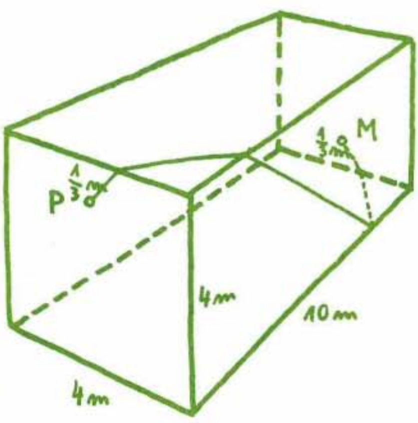
Za poljubni točki $A, B \in \mathcal{M}$ očitno velja neenakost $d(A,B) \leqslant d_{\mathcal{M}}(A,B)$, če pa je množica $\mathcal{M}$ konveksna, so najkrajše poti po $\mathcal{M}$ daljice, torej razdalji d in $d_{\mathcal{M}}$ sovpadata.

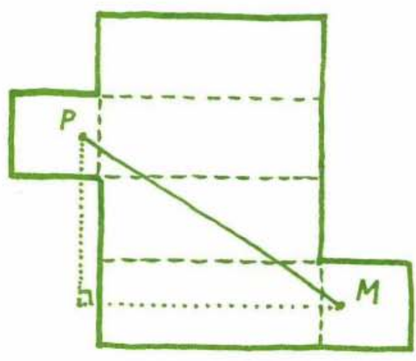
Kadar je $\mathcal{M}$ ploskev, najkrajše povezave med njenimi točkami imenujemo *geodetične krivulje* (v geodeziji – vedi o obliki in razsežnostih Zemlje – igrajo najkrajše poti pomembno vlogo). Na krogli so geodetične krivulje ('geodetke') loki glavnih krogelnih krogov. Tudi na plašču valja se je preprosto znajti: če ga odvijemo na ravnino, geodetke postanejo daljice. Najkrajše poti na plašču so torej deli vijačnic. Na manj preprostih ploskvah geodetične krivulje precej težje določimo. Že na površju kvadra pogosto najkrajše poti ne vidimo na prvi pogled, čeprav vemo, da je na posamezni stranski ploskvi le–ta daljica.

Za ilustracijo si oglejmo znano Dudeneyevo uganko o muhi in pajku, objavljeno leta 1903.

Prednja in zadnja stena kvadraste 10 m dolge sobe sta kvadrata s 4 m dolgo stranico. Na prednji steni je 1/3 m od stropa in po 2 m od obeh stranskih sten oddaljen pajek, ki je opazil muho, ujeto na zadnji steni sobe $\frac{1}{3}$ metra od tal in po 2 m oddaljeno od stranskih sten. Kako naj pajek pride do muhe po najkrajši poti?

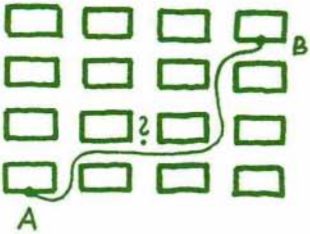
Površje kvadra (sobe) razgrnimo na ravnino. Če to storimo na pravi način, se najkrajša pot pokaže kot daljica od pajka do muhe. Med maloštevilnimi mrežami kvadra (ki jih dobimo, ko razgrnemo njegovo površje) ni težko najti



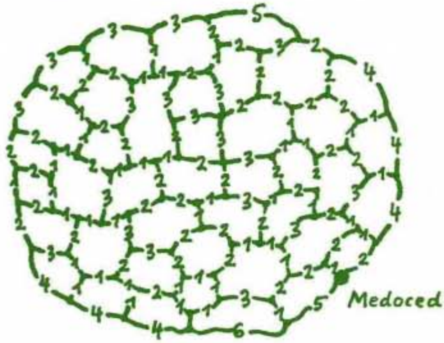


ustrezne. Narisana je na sliki, ki nam pomaga določiti tudi iskano razdaljo, ta meri 13 $\frac{1}{3}$ m. Pajek se sprehodi kar po petih mejnih ploskovah sobe.

Tudi pri ravninskih množicah včasih ni preprosto določiti najkrajše razdalje med dvema točkama. Naj bosta za zgled naslednji vprašanji ob slikah. Na levi sliki je načrtan tloris pretirano urejenega dela velemesta, na desni pa z danimi razdaljami mreža poti med vasmi v Koromandiji.

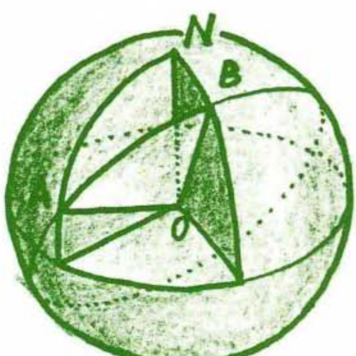


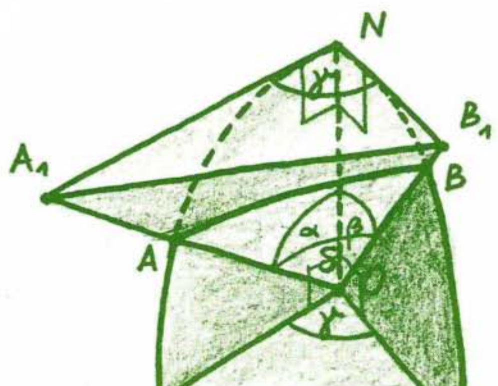
Kje vodi najkrajša pot med točkama A in B?



Katera vas leži najdlje od Medoceda?

Vrnimo se spet na Zemljo, poenostavljeno v kroglo. Najkrajše poti po njej že poznamo. Kako bi določili razdaljo med dvema krajema, če poznamo njuna zemljepisna položaja – torej njuni geografski dolžini in širini? Za izračun bomo potrebovali nekaj znanja o osnovnih lastnostih kotnih funkcij. Za





bralca, ki mu je ta snov domača, bosta zadostovali sliki in kratek komentar k njima.

$$\overline{OA_1} = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad \overline{OB_1} = \frac{R}{\cos \beta} \tag{1}$$

$$\overline{NA_1} = R \operatorname{tg} \alpha, \quad \overline{NB_1} = R \operatorname{tg} \beta \tag{2}$$

Tu je R polmer Zemlje, α zemljepisna širina točke A, β zemljepisna širina točke B, z γ pa označimo razliko zemljepisnih dolžin točk A in B.
Kosinusni izrek za trikotnik NA_1B_1 in OA_1B_1 nam da enakosti

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{NA_1}^2 + \overline{NB_1}^2 - 2\,\overline{NA_1} \cdot \overline{NB_1} \cos \gamma$$

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 - 2\,\overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} \cos \delta$$

Če vstavimo vanju zvezi (1) in (2), po kratkem računu dobimo

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

odkoder lahko izračunamo kot δ in dolžino loka AB, ki meri $R\,\delta$ (δ v radianih).

Na krogli ima vsaka točka svojo najbolj oddaljeno družico – imenujemo jo antipodna točka. Razdalja med njima je poleg tega tudi največja mogoča oddaljenost med dvema točkama na krogli.

Kako je s podobnimi lastnostmi pri splošni prostorski množici $\mathcal{M}$?

Če obstaja tako število $p \geqslant 0$, da razdalja d (oziroma $d_{\mathcal{M}}$) med poljubnima točkama iz $\mathcal{M}$ ne presega p, rečemo, da je $\mathcal{M}$ *omejena* za razdaljo d (oziroma $d_{\mathcal{M}}$). Sfera je omejena za obe razdalji. Če je r polmer sfere $\mathcal{S}$, lahko vzamemo $p = 2r$ pri razdalji d in $p = \pi r$ pri razdalji $d_{\mathcal{S}}$. Pri tem smo za p izbrali najmanjše število, ki še zadošča zahtevi za omejenost množice. Številu p z navedeno lastnostjo rečemo *premer* ★ (ali *diameter*) množice in ga označimo z $d(\mathcal{M})$, če merimo z razdaljo d; če pa imamo v mislih razdaljo $d_{\mathcal{M}}$, p imenujemo *notranji premer* in ga zaznamujemo z $d_n(\mathcal{M})$. Torej za sfero $\mathcal{S}$ s polmerom r velja $d(\mathcal{S}) = 2r$ in $d_n(\mathcal{S}) = \pi r$.

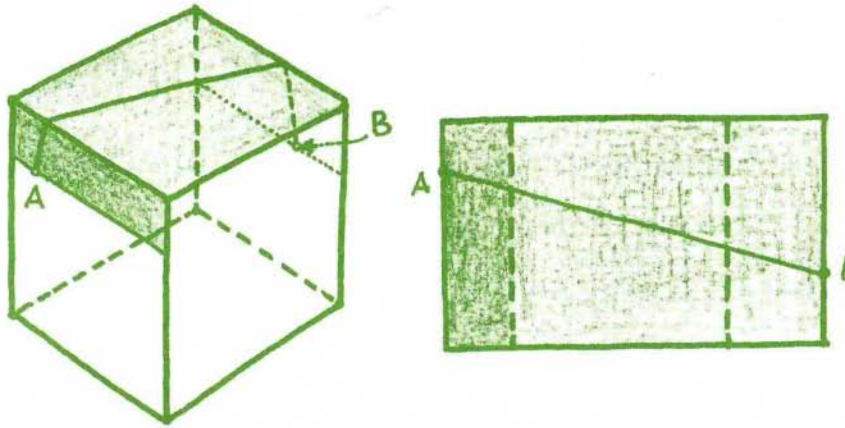
Za zgled izračunajmo premera dveh preprostih ploskev. Najprej se lotimo površja $\mathcal{P}$ kocke z robom dolžine a.

S premerom $d(\mathcal{P})$ ni težav. Na kocki sta prostorsko najbolj vsaksebi krajišči glavne diagonale, torej velja $d(\mathcal{P}) = a\sqrt{3}$.

★ Premer $d(\mathcal{K})$ kroga $\mathcal{K}$ s polmerom r meri $2r$.

Nekoliko več dela je z določanjem notranjega premera $d_n(\mathcal{P})$. Vsaka točka na kocki je dostopna z vsakega njenega oglišča preko dveh sosednjih stranskih ploskev, zato je oddaljena od oglišča največ $a\sqrt{5}$. Dokažimo, da velja $d_n(\mathcal{P}) = a\sqrt{5}$.

Dovolj je ugotoviti, da sta poljubni točki A in B, ki ležita na nasprotnih stranskih ploskvah kocke, oddaljeni med seboj največ $a\sqrt{5}$. Od površja kocke odstranimo dve nasproti ležeči stanski ploskvi (brez roba), ki ne vsebujeta točk A in B. Dobljeni plašč nato prerežemo kot kaže slika, razgrnemo v dva pravokotnika in na manjšem z daljico povežemo točki A in B. Ena od stranic tega pravokotnika je dolga a, druga pa ne presega $2a$, zato dolžina poti med A in B ni večja od $a\sqrt{5}$. Kratek premislek pove tudi to, da le razdalja med nasprotnima ogliščema kocke meri $a\sqrt{5}$, vse druge pa so krajše.



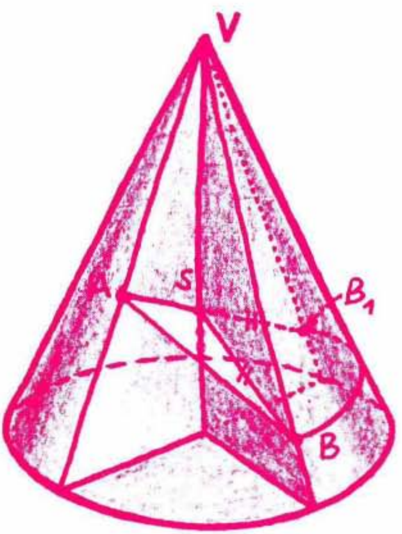
Določimo zdaj še oba premera plašča stožca $\mathcal{S}$ s stranico s in s polmerom r osnovne ploskve.

Vzemimo poljubni točki $A, B \in \mathcal{S}$ in zavrtimo B okrog osi stožca, tako da preide v točko B_1, ki leži na nasprotni ležeči stranici stožca kot A (glej sliko na naslednji strani). Potem velja

$$d(A, B_1) = d(A, S) + d(S, B_1) = d(A, S) + d(S, B) \geqslant d(A, B)$$

Odtod vidimo, da je največja mogoča razdalja $d(A, B)$ med točkama dosežena za točki A, B na osnem preseku stožca, torej na enakokrakem trikotniku z osnovnico $2r$ in krakom dolžine s. Tako velja

$$d(\mathcal{S}) = \begin{cases} s, & \text{če je } s \geqslant 2r \\ 2r, & \text{če je } s < 2r \end{cases}$$



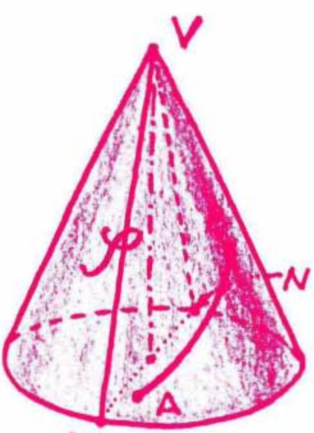
Ob skici z leve ponudimo bralcu še naslednje vprašanje.

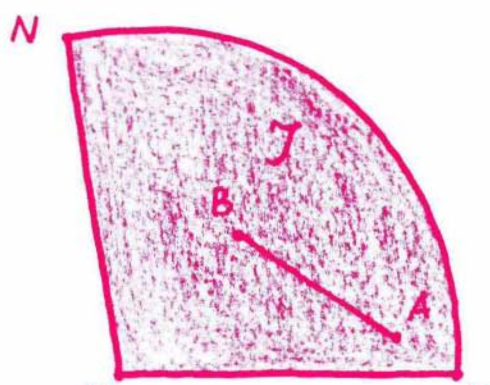
Koliko meri razdalja $d(A, B)$, če velja

$$d(A, V) = a$$
$$d(B, V) = b$$

ravnini VAS in VBS pa oklepata med seboj kot γ?

Izračunajmo še premer $d_n(\mathcal{S})$. V ta namen prerežemo plašč vzdolž osi stožca na dva enaka dela in enega odvijemo na ravnino v krožni izsek $\mathcal{J}$ (glej sliko). Naj bo t razdalja med M in N v $\mathcal{J}$.



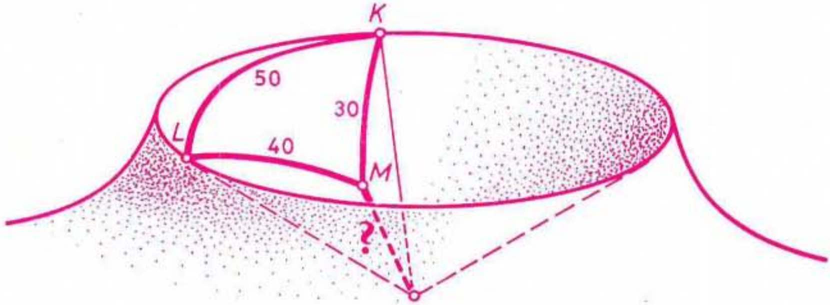


Bralec se bo brez težav prepričal, da velja enakost $d_n(\mathcal{S}) = d(\mathcal{J})$, in ugotovil, da iskani premer pri $s \geqslant t$ (ali ekvivalentno: pri $s \geqslant 3\,r$) meri $d_n(\mathcal{S}) = s$, pri $s < t$ (ali ekvivalentno $s < 3\,r$) pa je $d_n(\mathcal{S}) = t = 2\,s \sin \frac{\pi r}{2s}$. Torej imamo

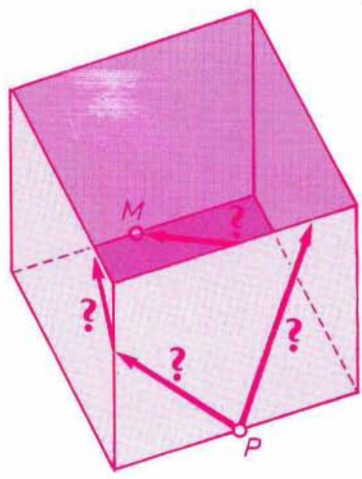
$$d_n(\mathcal{S}) = \begin{cases} s, & \text{če je } s \geq 3r \\ t, & \text{če je } s < 3r \end{cases}$$

Sklenimo prispevek z nalogami.

1. Klemen in Lojze stojita na robu stožčastega kraterja. Med seboj sta oddaljena (po kraterju) 50 m, prav toliko pa tudi od dna, kamor se namerava spustiti Miha. Ta je že v kraterju in ima do Klemna 30 m, do Lojzeta pa 40 m dolgo pot. Kako dolg spust do dna ga čaka?



2. V prostoru je dana premica p in dve točki A, B, ki ne ležita na njej. Za katero točko T na premici p je vsota razdalj $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$ najmanjša?
3. Označimo s $\mathcal{T}$ plašč valja z višino v in s polmerom r osnovne ploskve. Koliko merita premera $d(\mathcal{T})$ in $d_n(\mathcal{T})$?
4. Izračunaj zračno razdaljo med Leningradom (30^0 vzhodne geografske dolžine, 60^0 severne geografske širine) in New Orleansom (90^0 zahodne geografske dolžine, 30^0 severne geografske širine).
5. Na sredini enega od robov na dnu v kockasti škatli brez pokrova je ujeta muha, na sredini nasproti ležečega roba dna na zunanji strani škatle pa preži pajek. Pomagaj mu najti najkrajšo pot do žrtve.



Boris Lavrič