PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 4
Strani 194–196

Dragoljub M. Milošević, priredba in prevod Boris Lavrič:

SREDINI NA TEHTNICI

Ključne besede: matematika, naloge.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/16/940-Milosevic-Lavric.pdf

SREDINI NA TEHTNICI

Znamenita neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil je doživela vrsto različnih dokazov. V dvajsetih letih 18. stoletja jo je dognal škotski matematik *C. Maclaurin,* slabih sto let kasneje pa *A.L. Cauchy*, po katerem je ponekod celo dobila ime. Tu bomo predstavili izredno kratek (a manj poznan) dokaz te neenakosti in nekaj zanimivih posledic.

Najprej opredelimo obe omenjeni sredini.

Naj bodo $a_1, a_2, ..., a_n$ nenegativna realna števila. Potem je

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

njihova aritmetična sredina in

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

njihova geometrična sredina.

Če sta števili le dve (a_1 in a_2), je njuna aritmetična sredina $A = (a_1 + a_2)/2$ vsaj tolikšna kot njuna geometrična sredina $G = \sqrt{a_1 a_2}$ (torej $A \geqslant G$), kar je znal utemeljiti že Evklid. Poskusite še vi!

Tudi za $n > 2$ velja

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = G \qquad (AG)$$

To je neenakost, o kateri smo govorili na začetku prispevka in jo bomo zdaj dokazali.

Zaradi simetrije v (AG) lahko brez škode predpostavimo, da velja

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$$

Potem je $na_1 \leqslant a_1 + a_2 + ... + a_n \leqslant na_n$, torej $a_1 \leqslant A \leqslant a_n$. Zato velja $(A - a_1)(a_n - A) \geqslant 0$, od koder dobimo

$$(a_1 + a_n - A)\, A \geqslant a_1 a_n \qquad (1)$$

Naprej bo dokaz potekal z matematično indukcijo. Pri $n = 1$ (AG) očitno velja. Predpostavimo, da neenakost (AG) drži za $n - 1$ in jo uporabimo za števila

$$a_2, a_3, ..., a_{n-1} \quad \text{in} \quad a_1 + a_n - A$$

Tako dobimo oceno

$$A = \frac{a_2 + \ldots + a_{n-1} + (a_1 + a_n - A)}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{a_2 \ldots a_{n-1}(a_1 + a_n - A)}$$

okdoder s pomočjo (1) pridemo do iskane neenakosti

$$A^n = A^{n-1} \cdot A \geqslant a_2 \ldots a_{n-1}(a_1 + a_n - A)\, A \geqslant a_1 . a_2 \ldots a_n$$

Dokaz je s tem končan, bralca pa vabimo, da s ponovnim sprehodom skozenj dožene, da v (AG) velja enačaj natanko takrat, kadar je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Poglejmo še nekaj primerov uporabe neenakosti (AG).

1. Dokažimo, da ima med vsemi kvadri z dano prostornino kocka najmanjšo površino. Označimo robove kvadra z a, b in c. Kocka z enako prostornino ima rob $k = \sqrt[3]{abc}$ in površino $6k^2$. Za površino kvadra nam (AG) da želeno oceno

$$2(ab + bc + ca) \geqslant 6 \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = 6k^2$$

2. Vzemimo poljubno nenegativno realno število x. Postavimo $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$ in $a_n = 1 + nx$ v neenakost (AG) pa dobimo oceno

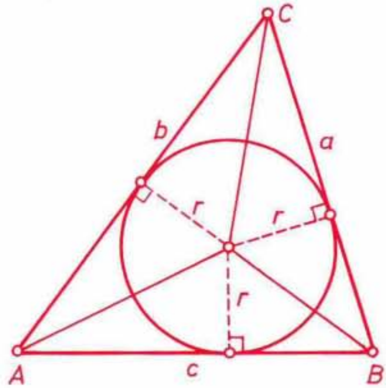
$$1 + x = \frac{1}{n}(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-1} + (1 + nx)) \geqslant \sqrt[n]{1 + nx}$$

ki jo preoblikujemo v znano Bernoullijevo neenakost

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

3. Označimo z v_a, v_b in v_c višine trikotnika ABC, z r pa polmer vanj včrtanega kroga. Dokazali bomo, da velja neenakost

$$3r \leqslant \sqrt[3]{v_a v_b v_c}$$



Označimo s p ploščino trikotnika ABC, poglejmo na sliko in zabeležimo:

$$av_a = bv_b = cv_c = 2p = ar + br + cr$$

Od tod z uporabo (AG) dobimo oceno

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2p} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{v_a v_b v_c}}$$

odkoder sledi iskana neenakost.