PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 4
Stran 196

Boris Lavrič:

MATEMATIČNI KROŽEK

Ključne besede: matematika, naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/940-Lavric.pdf

REŠITVE NALOG

MATEMATIČNI KROŽEK - Rešitev s str. 196

1. Izbrana številka ima devet mest, zato število n^6 ($n \in \mathbb{N}$), ki ga ta predstavlja, ustreza pogoju $10^8 \leqslant n^6 < 10^9$, ki nam da oceno $21 < n < 32$. Poleg tega je vsota cifer iskane številke deljiva s 3, torej je tudi število n deljivo s 3. Izmed treh mogočih vrednosti za n (24, 27 in 30) je očitno dobra le $n = 27$.
2. Če so točke oglišča konveksnega šestkotnika, potem vsaj en njegov notranji kot meri vsaj 120^0 (v nasprotnem primeru bi bila vsota velikosti vseh notranjih kotov šestkotnika manjša od 720^0), trditev pa tedaj očitno drži. Če pa dane točke niso oglišča nobenega konveksnega šestkotnika, leži vsaj ena od njih v notranjosti trikotnika z oglišči v drugih treh. Ta trikotnik je sestavljen iz treh manjših trikotnikov, ki se združijo v notranji točki. Vsota njihovih kotov ob tej točki meri 360^0, torej vsaj eden meri najmanj 120^0.
3. Zapišimo a v desetiškem številskem sestavu $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_{17}}$ in prištejmo $b = \overline{a_{17} a_{16} \dots a_2 a_1}$. Predpostavimo, da ima vsota

$$a + b = \overline{c_1 c_2 \dots c_{17}} \text{ ali } \overline{1 c_1 c_2 \dots c_{17}}$$

vse cifre $c_1, c_2, \dots, c_{17}$ lihe. Iz računa

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overline{a_1\ a_2\ \dots\ a_6\ \boxed{a_7}\ \boxed{a_8}\ \boxed{a_9}\ \boxed{a_{10}}\ \boxed{a_{11}}\ a_{12}\ \dots\ a_{16}\ a_{17}} \\ \overline{a_{17}\ a_{16}\ \dots\ a_{12}\ \boxed{a_{11}}\ \boxed{a_{10}}\ \boxed{a_9}\ \boxed{a_8}\ \boxed{a_7}\ a_6\ \dots\ a_2\ a_1} \end{array}\right\} + \\ \hline \overline{(1)\ c_1\ c_2\ \dots\ c_6\ \boxed{c_7}\ \boxed{c_8}\ \boxed{c_9}\ \boxed{c_{10}}\ \boxed{c_{11}}\ c_{12}\ \dots\ c_{16}\ c_{17}} \end{array}$$

vidimo, da je $a_8 + a_{10} \geqslant 10$ (v nasprotnem primeru bi bilo število c_9 sodo). Število c_7 je liho, zato je vsota $a_7 + a_{11}$ soda. Potem pa zaradi lihosti c_{11} velja $a_6 + a_{12} \geqslant 10$. Če z enakim sklepanjem nadaljujemo, naposled ugotovimo, da je vsota $a_1 + a_{17}$ soda. Toda, potem je tudi c_{17} sodo število, kar pa nasprotuje predpostavki na začetku dokaza.

Boris Lavrič