PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 4
Strani 229–231

Vilko Domajnko:

TRI MODRE

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/940-Domajnko.pdf

TRI MODRE

Za začetek si najprej le bežno oglejmo tri *modre* iz precej davnih časov.

Prve *modre* se je domislil Kitajec *Gonsung Long,* ki je živel približno 200 let pred našim štetjem, za časa vladavine dinastije Zhou (beri: Ču). Takole gre:

"Vzemi za laket dolgo palico in jo slehernega dne prelomi na pol. Naslednjega dne boš dal na pol le še njeno polovičko, nato le še četrtino, ... Pa vendarle palice na tak način nikdar ne bo zmanjkalo. Niti čez desettisoč generacij ne, ki bi morebiti nadaljevale z lomljenjem ostankov te palice."

Druga *modra* prihaja iz glave starega Grka *Zenona,* ki jo je domislil približno kakšnih 200 let pred življenjem Gonsung Longa. Pravi pa takole:

"Recimo, da bi rad šel po ravni črti od točke A do točke B. Da bi prišel do B, moram najprej prehoditi polovico razdalje med A in B. Recimo – razdaljo $\overline{AB_1}$. In – da bi prišel do B_1, moram najprej priti do B_2, ki leži na polovici poti med A in B_1. To lahko kar naprej ponavljam. Zmeraj je pač treba prehoditi najprej polovico poti pred seboj. In v okviru takšnega razmišljanja je seveda precej jasno, da se sploh nikdar ne bom premaknil z mesta v točki A. **Sleherno gibanje je torej nemogoče!"**

Tretja *modra* je zelo blizu druge. Le nekaj desetletij pred Zenonom jo je povedal *Demokrit.* Tudi on je bil iz Grčije.

"Vzemi jabolko in ga prereži na pol. Nato razpolovi dobljeno polovičko. Zatem razpolovi preostalo četrtino jabolka; zatem razpolavljaj spet in spet. Dokler gre. Povej, največ kolikokrat ti bo uspelo razpolavljati jabolko na tak način?"

Pa poglejmo, koliko je skupnega v teh treh domislicah in v čem se med seboj razhajajo.

Gonsung Long pravi tole:

Polovica palice in še njena četrtina in še njena osmina in še njena šestnajstina in še ... – to vse skupaj (kar so ostanki pri lomljenju palice na slehernem izmed korakov) je zagotovo manj od začetne ene cele palice. Pa če še tako dolgo lomim in kopičim ostanke. Torej

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... \longrightarrow 1$$

ali

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... \longrightarrow 1$$

Tak zapis pomeni, da se vsota na levi sicer zares "zelo zelo" približa vrednosti 1, vendar je pa žal nikdar ne doseže. Zmeraj ji vsaj še malo manjka.

Gonsung Long pravi, da niti desettisoč členov v tej vsoti ni dovolj, da bi bila njena vrednost 1. Dovolj bi jih bilo kvečjemu neskončno (?) mnogo. Vsi pa vemo, da je to (neskončno) zelo zelo zelo daleč!

Zenon pa o istem problemu modruje iz natanko nasprotne strani. In sicer pravi takole:

"Res je, da z lahkoto prehodim polovičko razdalje med *A* in *B*. Ničkolikokrat sem jo že! Res je, da z lahkoto prehodim tudi njeno četrtino, pa njeno osmino, njeno šestnajstino, ... Vse to gre prav zlahka. Toda – prvi korak, tisti, prvi! Njega ne zmorem storiti. Pa saj ne, da bi bil predolg, o, ne! Prej obratno, zelo kratek bi naj bil! Toda – ne vem, **kdaj** ga naj storim. Brž, ko se odločim – sedaj!, spoznam, da bi že prej, še pred tem, moral storiti tistega za polovico krjšega. In še pred njim tistega ..."

Torej drži, da bi naj bila vsota vseh teh njegovih premikov

$$\ldots + \frac{\overline{AB}}{32} + \frac{\overline{AB}}{16} + \frac{\overline{AB}}{8} + \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AB}}{2}$$

kar ves premik od *A* do *B*

$$\ldots + \frac{\overline{AB}}{2^5} + \frac{\overline{AB}}{2^4} + \frac{\overline{AB}}{2^3} + \frac{\overline{AB}}{2^2} + \frac{\overline{AB}}{2} \longrightarrow \overline{AB}$$

če ... – če bi le bil sposoben poiskati začetek.

No, sedaj pa je že jasno. Vidimo, da je Zenonova vsota povsem identična z Gonsung Longovo, le da je njen zapis zrcalen. To pa že pomeni, da oba možakarja trdita pravzaprav eno in isto! Gonsung Long pravi, da se v njegovi vsoti na levi strani ne da priti do konca in da je zatorej treba kar v neskončnost. Zenon pa, da se v njegovi vsoti na levi ne da stopiti na začetek. Treba bi bilo začeti v neskončnosti. To pa je zares težko, seveda!

Vendar pa zaplet, ki je nastal, navidez prav presenetljivo "neproblematično" razvozla *Demokrit.*

Na prvi pogled se zdi Demokritov problem skorajda povsem enak Gonsung Longovemu. Razlika je le v tem, da Demokrit razpolavlja jabolko, Gonsung Long pa palico. Toda! Demokrit pravi, da lahko (jabolko) razpolavljam le tako dolgo, dokler ne pridem do delca, ki je nedeljiv. Do atoma torej! In pri njem se ves ta postopek razpolavljanja seveda ustavi.

Mimogrede – z nekaj srednješolske matematične spretnosti se da brž izračunati, da noben Demokrit ne bi mogel jabolka razpoloviti več kakor 90-krat. Več o tem najdete v članku (2).