PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 3
Strani 159–163

Sandi Klavžar:

O IGRI PETNAJST IN PERMUTACIJAH

Ključne besede: matematika, kombinatorika, permutacije, rekreacijaska matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/930-Klavzar.pdf

O IGRI PETNAJST IN PERMUTACIJAH

Igra Petnajst je bila včasih zelo priljubljena. Okrog leta 1880 so jo igrali prav vsi, tako kot pred časom razvpito Rubikovo kocko. Najbolj vneti reševalci so se lahko celo preizkušali na številnih tekmovanjih. Med vrhuncema popularnosti igre Petnajst in Rubikove kocke je poteklo približno 100 let in če bi zlorabili matematično indukcijo, bi lahko zaključili, da se bo naslednja igra, ki bo preplavila svet, spet pojavila čez približno 100 let. Če danes pogledamo, kako je z obema igrama, ugotovimo, da ju skoraj ne srečamo več. Le tu in tam se še pojavita. Ravno pred kratkim sem v trafiki videl igro "Enaintrideset", ki je igra Petnajst z nekaj več ploščicami.

O igri Petnajst je Presek že pisal (Tomaž Pisanski: Petnajst in podobne igre, Presek 1982–83, št. 4). Najprej se spomnimo, za katero igro gre. Na kvadratu 4 x 4 so razporejene ploščice, ki so označene s števili od 1 do 15, eno mesto pa je prazno. Z zaporednim premikanjem poskušamo ploščice spraviti v urejen položaj. V vsakem koraku lahko premaknemo le eno izmed ploščic, ki so po stranici sosednje praznemu prostorčku. Na sliki 1a je primer začetne razporeditve, ki jo moramo spraviti v končno razporeditev na sliki 1b. Znak * na sliki označuje prazno mesto. V prvem koraku lahko premaknemo le ploščico 3 ali pa 9. Če premaknemo ploščico 3, lahko v naslednjem koraku premaknemo ploščico 5, 15 ali pa 3. Tako premikamo ploščice, dokler ne pridemo do končne razporeditve ali dokler ne obupamo.

7	14	1	11
12	2	6	8
13	4	15	9
10	5	3	*

Slika 1a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	*

Slika 1b

Končna razporeditev je vedno taka, kot je prikazano na sliki 1b. Ker lahko vsako razporeditev ploščic preprosto prevedemo v obliko, kjer je prazno mesto v spodnjem desnem kotu, privzemimo, da je tudi v začetni razporeditvi prazno mesto v spodnjem desnem kotu. V omenjenem članku Tomaža Pisanskega je opisan algoritem, kako iz poljubne začetne razporeditve poskušamo priti do končne razporeditve. Včasih postopek uspe, drugič pa ne. V resnici algoritem pripelje do končne razporeditve v natanko polovici primerov in to so vsi primeri, ko je igra rešljiva. Algoritem je naslednji: Najprej uredimo ploščice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 8. Teh ploščic ne bomo več premikali. Nato uredimo še ploščici 9 in 13, nato še 10 in 14. Tudi teh ploščic ne premikamo več. Za urejanje nam preostanejo samo še ploščice 11, 12 in 15. V polovici primerov jih lahko uredimo, v ostalih pa ne.

Vprašajmo se, kako bi lahko iz začetne razporeditve ugotovili, ali je igra rešljiva ali ne. Z nekaj znanja o permutacijah bo odgovor preprost. To pa je tudi zadosten razlog, da si najprej ogledamo nekaj osnovnih dejstev o permutacijah, ki so eden najpomembnejših pojmov v kombinatoriki.

O permutacijah

Imejmo n elementov, ki so urejeni v določenem vrstnem redu. Imena Ana, Kristina, Peter, Simon in Žiga so na primer urejena po abecedi. Če ta imana premešamo, na primer Simon, Žiga, Peter, Kristina, Ana, potem smo napravili *permutacijo* teh imen. Odslej bomo identificirali elemente, ki jih permutiramo, kar s prvimi n naravnimi števili. Če permutacija elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 razporedi v vrstni red 3, 5, 7, 1, 2, 4, 6 bomo to krajše zapisali:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 3\,5\,7\,1\,2\,4\,6 \end{pmatrix}$$

V zapisu permutacije torej v zgornjo vrstico zapišemo števila od 1 do n, v spodnjo pa njihovo razporeditev. Permutacijo, kjer so elementi tudi v spodnji vrstici razporejeni od 1 do n, imenujemo *identična permutacija.*

Koliko je vseh permutacij n elementov? Takole razmislimo. Na prvem mestu lahko stoji katerokoli izmed n števil. Ko na prvem mestu stoji neko število, je na drugem mestu lahko katerokoli izmed preostalih $n - 1$ števil. Ko postopek nadaljujemo, imamo na predzadnjem mestu na izbiro še dve števili, na zadnjem pa le še eno samo. Vseh možnih permutacij je torej
$n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,2.1$. Dobljeno število označimo z $n!$ (izgovarjamo *n—fakulteta*).

Za vajo izpiši vse permutacije treh in štirih elementov!

Če v permutaciji med seboj zamenjamo dva elementa, potem pravimo, da smo napravili *transpozicijo.* Z zaporedjem transpozicij lahko vsako permutacijo prevedemo na identično permutacijo. Če drugače ne, potem najprej zamenjamo element, ki je na prvem mestu, z enico; nato element, ki je na drugem mestu, z dvojko in tako do konca, dokler niso vsi elementi v spodnji vrstici na pravem mestu. Na sliki 2 je primer zaporedja transpozicij, ki permutacijo $\binom{12345}{34125}$ prevede v identično permutacijo.

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 34125 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12345 \\ 31425 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12345 \\ 32415 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12345 \\ 12435 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix}$$

V našem primeru smo začetno permutacijo privedli do identične s štirimi transpozicijami. Seveda bi lahko to naredili tudi drugače. Najmanj transpozicij bi naredili, če bi najprej zamenjali 1 in 3, nato pa še 2 in 4. Poskušaj sedaj še nekaj drugih zaporedij in preštej, koliko transpozicij si napravil! Gotovo si opazil, da si vedno potreboval sodo število transpozicij. To ni nič presenetljivega. Dokažemo namreč lahko, da če dano permutacijo pretvorimo v identično permutacijo s sodim številom transpozicij, potem je na noben način ne moremo z lihim in obratno. Tega ne bomo dokazovali. Dokaz lahko najdemo v knjigi Ivana Vidava Algebra, Ljubljana 1980, na strani 63. Zaradi te lastnosti pravimo permutacijam, ki jih spravimo do identične s sodim številom transpozicij, *sode permutacije,* ostalim pa *lihe permutacije.* Sodih permutacij je ravno toliko, kot je lihih.

Vprašajmo se, kako učinkovito določimo parnost permutacije, t.j. ali je permutacija soda ali liha. Ugotavljanje parnosti po zgornji definiciji gotovo ni najprimernejše; če je permutacija nekoliko daljša, moramo prepisovati vrstice kot nori, pa še zmotimo se lahko (če se sodokrat ni nič hudega). Vzemimo naslednjo permutacijo: $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&9&6&3&1&4&5&8&2\end{smallmatrix}\right)$. Po vrsti zasledujmo, kam "gredo" elementi permutacije: 1 gre v 7, 7 v 5 in 5 v 1. Krog je sklenjen. Naprej: 2 gre v 9 in 9 v 2. 3 gre v 6, 6 v 4 in 4 v 3. Element 8 pa gre kar sam vase. Račun zapišemo takole:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&9&6&3&1&4&5&8&2\end{pmatrix} = (175)(29)(364)(8).$$

Pravimo, da smo permutacijo zapisali s *tujimi cikli.* Cikle imenujemo tuje, ker vsak element permutacije nastopa v natanko enem ciklu. Vsak cikel zase je tudi permutacija. Cikel (1 7 5) moramo razumeti takole: 1 gre v 7, 7 v 5, 5 v 1, vsi ostali elementi: 2, 3, 4, 6, 8 in 9 pa se preslikajo vase. Skoraj očitno je, da se da vsaka permutacija zapisati s tujimi cikli, zato tega ne bomo dokazovali.

Kako ugotovimo parnost cikla? Število elementov, ki nastopajo v zapisu cikla, imenujemo *dolžina cikla.* Dokaži, ali pa vsaj na primerih preizkusi, da velja: če je dolžina cikla sodo število, potem je cikel liha permutacija, sicer pa je soda. V našem primeru so vsi cikli sodi, izjema je le cikel (2 9). Za vsak posamezen cikel znamo določiti njegovo parnost. Kako pa iz dolžin tujih ciklov permutacije ugotovimo parnost permutacije? Ko urejamo elemente v nekem ciklu, so elementi ostalih ciklov nedotaknjeni, saj so cikli tuji! Torej uredimo prvi cikel, drugi cikel in tako do konca. Število vseh napravljenih transpozicij je enako vsoti števil transpozicij po posameznih tujih ciklih.

Izpeljali smo naslednji recept za ugotavljanje parnosti. Najprej permutacijo zapišemo s tujimi cikli in vsakemu ciklu priredimo njegovo dolžino zmanjšano za 1. Nato števila seštejemo in če je vsota sodo število, je permutacija soda, sicer pa liha. Na prvi pogled morda nekoliko zapleteno, ko pa napravite nekaj primerov, postane postopek zelo enostaven. V gornjem primeru imamo račun: $2 + 1 + 2 + 0 = 5$, torej je permutacija liha. Še en primer: permutacijo s slike 2 zapišemo s cikli (1 3)(2 4)(5), otrej računamo $1 + 1 + 0 = 2$, zato je permutacija soda.

Nazaj k igri Petnajst

Sedaj že dovolj vemo o permutacijah, da uženemo igro Petnajst. Najprej začetni razporeditvi ploščic priredimo permutacijo. To napravimo tako, da po vrsticah preberemo števila na kvadratu. Začetni razporeditvi s slike 1 pripada permutacija

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & * \\ 7 & 14 & 1 & 11 & 12 & 2 & 6 & 8 & 13 & 4 & 15 & 9 & 10 & 5 & 3 & * \end{pmatrix}$$

Če koga moti ⋆ kot element permutacije, lahko ⋆ mirno zamenja s številom 16. Kaj se zgodi s to permutacijo, ko napravimo en premik ploščice? Natanko ena transpozicija, kjer se zamenjata element ⋆ in neka ploščica. In kako pridemo od začetne razporeditve do končne? Z zaporedjem transpozicij, ki pa seveda niso poljubne, saj vedno premaknemo ⋆. Če smo prišli do končne razporeditve, potem trdimo, da smo napravili sodo število premikov prazne ploščice. Res! Prazna ploščica je na koncu na istem mestu kot na začetku. Zato se je morala pomakniti navzgor tolikokrat kot navzdol in levo tolikokrat kot desno. Torej zaključimo. *Če je permutacija, ki pripada začetni razporeditvi (z ⋆ v spodnjem desnem kotu), liha, potem igra Petnajst nima rešitve.*

Permutacijo k začetni razporeditvi s slike 1 zapišemo s tujimi cikli:

$$(1\ 7\ 6\ 2\ 14\ 5\ 12\ 9\ 13\ 10\ 4\ 11\ 15\ 3)(8)(*)$$

Račun $13 + 0 + 0 = 13$ nam pove, da je permutacija liha, torej naloga s slike 1 nima rešitve.

Igro Petnajst tako povsem obvladamo. Algoritem reševanja je naslednji:

1. Če ⋆ ni v spodnjem desnem kotu, razporeditev popravi v tako obliko.
2. Začetni oz. dobljeni razporeditvi priredi permutacijo.
3. Ugotovi parnost permutacije.
4. Če je permutacija liha, igra nima rešitve, sicer pa z algoritmom z začetka članka reši nalogo.