PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 1
Strani 41–47

Mojca Lokar:

ČAROVNA SEDMICA

Ključne besede: matematika, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/923-Lokar.pdf

Veliki matematiki se ne ukvarjajo le s težkimi problemi. Tako je tudi v zbirki romunskega matematika Dmitrija Pompeiuja zanimiva naloga:

Veš, da je stomilijonsko število $ABC398246$ deljivo s 317. Poišči cifre A, B in C!

Kako bi rešili nalogo? Lahko bi ugibali in naredili preizkus. Če je prava zadnja možnost, ne bi omagali? Imamo kar 900 možnosti, ker na mesto A lahko postavimo devet cifer (1 ali 2 ali 3...9), na mesti B in C pa po deset cifer (0 ali 1 ali 2...9). Tudi deljenje s tako velikim (trimestnim) številom je zamudno. Z računalniškim programom ne bi bilo težko. Vendar računalnika nimamo vedno pri roki, hišni računalniki pa tudi običajno ne morejo računati s tako velikimi celimi števili. V slednjem primeru si lahko pomagamo drugače, a o tem kdaj drugič. Danes bomo računali brez pomoči računalnika.

Pompeiu, bistra glava, je rešil nalogo s preprostim sestavljanjem cifer. Problem je prevedel na množenje in uporabil nenavadno lastnost števila 7, enice v številu 317.

Najprej si oglejmo število 7. Množimo ga po vrsti z vsemi enomestnimi števili:

$$\begin{array}{r} 7\ 7\ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7 \\ \times\quad 0\ 1\ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9 \\ \hline 0\ 7\ 14\ 21\ 28\ 35\ 42\ 49\ 56\ 63 \end{array}$$

Pozabimo na desetice, poglejmo le enice: 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3. Dobili smo zopet vsa enomestna števila vendar v drugem vrstnem redu. To imenujemo permutacija (prerazporeditev).

$$\begin{array}{c} 0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 0\,7\,4\,1\,8\,5\,2\,9\,6\,3 \end{array}$$

Vsa enomestna števila nimajo te lastnosti. Recimo število 6:

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
\times & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
 & 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54
\end{array}
$$

Če spet pogledamo le enice, imamo

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
0 & 6 & 2 & 8 & 4 & 0 & 6 & 2 & 8 & 4
\end{array}
$$

V tem primeru druga vrsta ni permutacija prve, ker lihe cifre ne nastopajo.

Vrnimo se k naši nalogi. Prevedemo jo na množenje: 317 krat neko neznano število (recimo mu ...RSTUVWXYZ, kmalu bomo videli koliko mestno je) mora biti enako ABC398246.
Množimo:

317	
× ...RSTUVWXYZ	
...----------	7 s celim neznanim številom
...--------	1 s celim neznanim številom
...-------	nato še 3 z neznanim številom.
	Vse tri vrste seštejemo,
ABC3 9 8 2 4 6	seveda pazimo na podpisovanje.

Kako? Neznanih števil je sedaj več kot prej in še vemo ne, koliko jih je! Pa vendar poiskusimo.

Enico dobimo le, ko 7 množimo z Z. Torej mora biti 7 krat Z enako številu, ki ima za enico 6. Naša permutacija pove, da mora biti Z enako 8. Druge možnosti ni. Pišimo zdaj 8 na mesto Z in množimo ...RSTUVWXY8 z 317. To lahko storimo, saj vrstni red členov pri množenju ni važen (vseeno je ali množimo 8 s 7 ali 7 z 8).

```
      ...RSTUVWXY8
 ×             317
 -----------------
              2536   8 množeno s 317
      ...----HJKL    Y množeno s 317
      ...-------     X množeno s 317
      ⋱              Nadaljujemo z W V U T S R ...
 -----------------
         ABC398246
```

Jasno je, da mora biti:

$$L + 3 = 4$$

Zato mora biti

$$L = 1$$

Poglejmo naprej: 7 krat Y mora biti (L) 1. Permutacija nam pove, da je to možno le, če je Y enak 3. Ko dopolnimo še drugo vrstico (množimo z Y oziroma 3), dobimo:

```
      ...RSTUVWX38
 ×             317
 -----------------
              2536   8 množeno s 317
              951    3 množeno s 317
      ...---DEFG     X množeno s 317
      ⋱              Nadaljujemo z W V U T S R ...
 -----------------
         ABC398246
```

Zdaj mora biti

$$5 + 5 + G =\sim 2 \text{ (število, ki ima enico 2)}$$
$$G = 2$$

Tabela permutacije nam pove, da 2 dobimo, če 7 množimo s 6, zato

$$X = 6$$

Nadaljujmo:

...RSTUVW638	
× 317	
2 536	8 množeno s 317
9 51	3 množeno s 317
1 9 0 2	6 množeno s 317
...---EJK	W množeno s 317
⋱	Nadaljujemo z V U T S R ...
ABC3 9 8 246	

Veljati mora

$$2 + 9 + 0 + K + 1 =\sim 8$$

Zaradi prenosa desetic (5 + 5 + 2 = 12), je prišteta še 1. Torej mora biti

$$K = 6$$

Iz permutacije vidimo, da moramo množiti z 8, če hočemo dobiti enice 6, zato mora biti

$$W = 8$$

...RSTUV8638	
× 317	
2536	8 množeno s 317
951	3 množeno s 317
1902	6 množeno s 317
2 5 36	8 množeno s 317
-FEJ	V množeno s 317
⋱	Nadaljujemo z U T S R ...
ABC3 98246	

Veljati mora

$$9+3+J+1=\sim 9 \Longrightarrow J=6 \quad \text{in} \quad V=8$$

$$\begin{array}{rrl}
 & \ldots \mathrm{R\,S\,TU88638} & \\
\times & 317 & \\
\hline
 & 2536 & \text{8 množeno s 317} \\
 & 951 & \text{3 množeno s 317} \\
 & 1902 & \text{6 množeno s 317} \\
 & 2536 & \text{8 množeno s 317} \\
 & 2536 & \text{8 množeno s 317} \\
 & \ldots \mathrm{FE} & \text{U množeno s 317} \\
 & \ddots & \text{Nadaljujemo z T S R} \ldots \\
\hline
 & \mathrm{A\,B\,C}398246 &
\end{array}$$

Zdaj je

$$1+5+3+E+1=\sim 3 \Longrightarrow \quad E=3 \qquad U=9$$

$$\begin{array}{rrl}
 & \ldots \mathrm{RST}988638 & \\
\times & 317 & \\
\hline
 & 2536 & \text{8 množeno s 317} \\
 & 951 & \text{3 množeno s 317} \\
 & 1902 & \text{6 množeno s 317} \\
 & 2536 & \text{8 množeno s 317} \\
 & 2536 & \text{8 množeno s 317} \\
 & 2853 & \text{9 množeno s 317} \\
\hline
 & 313398246 &
\end{array}$$

Že imamo rešitev.

$$A=3 \qquad B=1 \qquad C=3$$

Neznano število, s katerim smo množili, je šestmestno. Toliko mest smo potrebovali, da smo s podpisovanjem prišli dovolj v levo (nad A).

Preprosto, kaj? Ali se da tako "računstvo" uporabiti tudi v drugih primerih?

Tak postopek smo lahko uporabili, ker pri množenju števila 7 s števili med 0 in 9 vedno dobimo različno število za enico. Ampak, ali je 7 edino enomestno število s to lastnostjo? Da vsa niso taka, smo že videli. Tudi vsa soda lahko takoj izločimo, ker pri množenju ne dobimo lihih števil. 7 ni edino enomestno število s to lastnostjo, saj nam da

množenje s 3

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 3 6 9 2 5 8 1 4 7

množenje z 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Tudi množenje z 1 nam da permutacijo

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ker je spodnja vrstica popolnoma enaka zgornji (ni nobene spremembe), to permutacijo imenujemo identiteta.

Pompeiujevo "sestavljanko" lahko razširimo še na množenje števil z enicami 1, 3 ali 9.

Poskusi še ti! Najdi cifre A, B in C v številu ABC8682, ki je deljivo natančno z 213. (Rešitev: A = 1, B = 9, C = 1)

Kaj je nenavadnega v številih 1, 3, 7 in 9, da nam dajo permutacijo? Zdi se da lihost. Pa vendar, tudi 5 je liho število, te lastnosti pa nima. 1, 3, 7 in 9 so natančno tista enomestna števila, ki so si *tuja* z 10. *(Števili sta si tuji, če razen 1 ni nobenega števila,*