

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 15 (1987/1988)

Številka 6

Strani 362-365

Marko Razpet:

ZAKLAD NA SAMOTNEM OTOKU

Ključne besede: matematika, geometrija, analitična geometrija, nenakosti, koordinatni sistem, razdalja, aritmetična sredina, geometrična sredina, največja vrednost funkcije.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/915-Razpet.pdf>

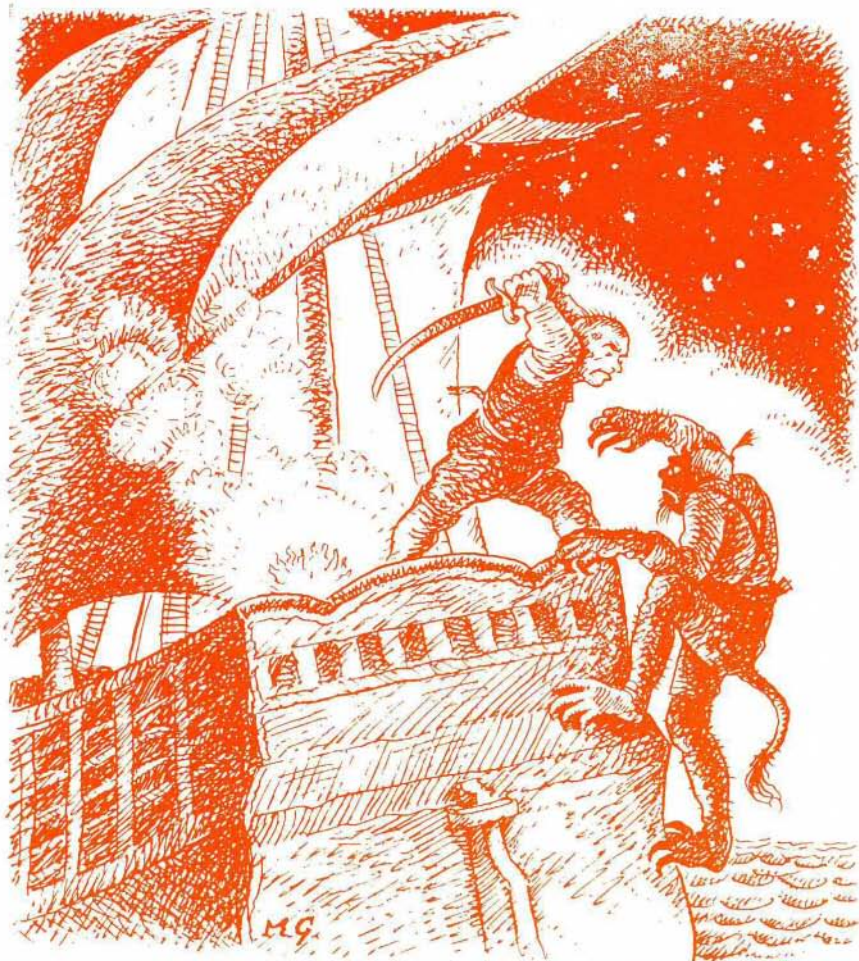
© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ZAKLAD NA SAMOTNEM OTOKU

Bilo je takrat, ko je bil Krjavelj še pri mornarjih. Nekega lepega dne je imel izjemno srečo. Iz morja je dvignil steklenico s sporočilom. Na kar dobro ohranjenem koščku papirja je bilo napisano nekako takole:



"Kako pa veš, da si ga presekal?" vpaša Francelj.

"Kaj bi ne vedel, saj je dvakrat padlo v morje; prvič je reklo: štrbunk! vdrugič pa se je slišalo: štr—bunk! Pa reci potlej, da ga nisem presekal, da ga nisem na dva kosa presekal."

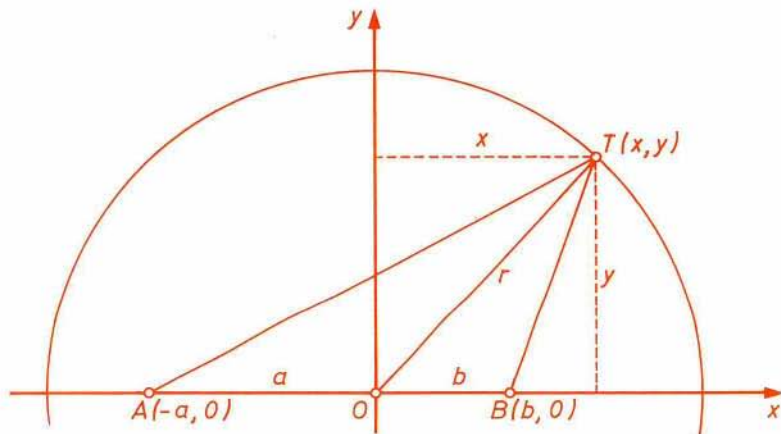
Sredi morja (sledijo zemljepisne koordinate) leži samotni otok. Približno na sredini otoka raste kokosova palma in kruhovec. Pojdi od palme do kruhovca in šteje korake. Nazaj grede zabij v tla količek na drugi petini razdalje med drevesoma. Vsota razdalj zaklada od dreves mora biti največja, vendar je trikrat dlje od količka, kot je količek od kruhovca.

Krjavelj je ljubosumno spravil listek, steklenico vrgel nazaj v morje in odslužil mornarico. Vmes je doživel še tisto znamenito srečanje z vragom, ki pa se je, kot vemo, srečno končalo. Na kopnem mu je kmalu postalo dolgčas po morju, spomnil se je na porumeneli listič in se odločil, da izkoplje zaklad. Najel si je barko in poiskal omenjeni otoček. Drevesi sta bili še vedno tam, možakarju je kmalu uspelo zabiti količek na pravem mestu in kopati primerno daleč stran, zaklada pa ni in ni hotelo biti. Obupal je in se razočaran vrnil domov. O tem dogodku ni nikomur pripovedoval, raje se je postavljaj z vragom.

Mi pa si oglejmo, kako bi s kancem matematike našli zaklad. V točki A naj raste palma, v B pa kruhovec. Količek je treba zabiti v točki O na daljici AB . Naj bo a razdalja med točkama A in O , b pa razdalja med O in B . Zaklad je zakopan v točki T . Naj bo r razdalja med O in T . Pri vsem tem mora biti vsota razdalj $AT + BT$ čim večja. Uvedemo še koordinatni sistem z izhodiščem v točki O , os x je usmerjena proti točki B . Iskana točka T naj ima koordinati x, y . Po Pitagorovem izreku je

$$AT^2 = (x + a)^2 + y^2, \quad BT^2 = (x - b)^2 + y^2 \quad \text{in} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Vsota razdalj $f(x) = AT + BT$ je odvisna od abscise točke T . Ni težko videti, da velja:



$$f(x) = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ax} + \sqrt{b^2 + r^2 - 2bx}$$

Bralec, ki mu je pojem odvoda že domač, bo zdaj nalogo rešil mimogrede. Mi pa se je bomo lotili z elementarnimi sredstvi.

Dovolj je obravnavati primer, ko je $a \geq b$, $0 < a < r$ in $0 < b < r$.

V Krjavljevem primeru je namreč $b = 2(a + b)/5$ in $r = 6(a + b)/5$, iz česar dobimo $a = r/2$ in $b = r/3$.

Sedaj moramo poiskati tako absciso x , da je vrednost $f(x)$ čim večja. V ta namen uporabimo dva pomožna izreka.

Pomožni izrek 1. Geometrijska sredina \sqrt{ab} pozitivnih števil a, b ne presega njune aritmetične sredine $(a + b)/2$. Obe sredini sta enaki natanko takrat, ko je $a = b$.

Dokaz: Ker sta a in b pozitivni števili, obstajata njuna kvadratna korena \sqrt{a} in \sqrt{b} , kvadrat njune razlike pa je nenegativen: $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$ iz tega pa dobimo:

$$\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$$

Obe sredini pa sta enaki samo v primeru, ko je $a = b$.

Pomožni izrek 2. Za poljubna pozitivna števila a, b, c, d velja neenakost:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a + c)(b + d)} \quad (1)$$

pri čemer velja enakost natanko tedaj, ko je $ad = bc$.

Dokaz: Pri pogojih tega izreka sta tudi števili ad in bc pozitivni in po prvem pomožnem izreku velja:

$$2\sqrt{(ad)(bc)} \leq ad + bc$$

Enačaj velja natanko takrat, ko je $ad = bc$. Če v zadnji neenakosti na obeh straneh prištejemo število $ab + cd$, dobimo $ab + 2\sqrt{abcd} + cd \leq ad + bc + ab + cd$ ali po urejanju

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \leq (a + c)(b + d)$$

Po korenjenju dobimo neenakost (1).

Prepišimo $f(x)$ nekoliko drugače:

$$f(x) = \sqrt{a(a + r^2/a + 2x)} + \sqrt{b(b + r^2/b - 2x)}$$

Če v neenakosti (1) nadomestimo b z $a + r^2/a + 2x$, c z b in d z $b + r^2/b - 2x$, dobimo neenakost

$$f(x) \leq \sqrt{(a + b)(a + b + r^2/a + r^2/b)}$$

in po preureditvi

$$f(x) \leq (a + b) \sqrt{1 + r^2/(ab)} \quad (2)$$

