

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 15 (1987/1988)

Številka 6

Strani 352-354

Tomaž Košir in Dragoljub M. Milošević:

PTOLEMEJEV IZREK

Ključne besede: matematika, kotne funkcije.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/915-Kosir-Milosevic.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PTOLEMEJEV IZREK

Že v Preseku 1 (1987/88) smo spoznali Ptolemejev izrek: V tetivnem četverokotniku je vsota produktov dolžin nasprotnih stranic enaka produktu dolžin diagonal, torej

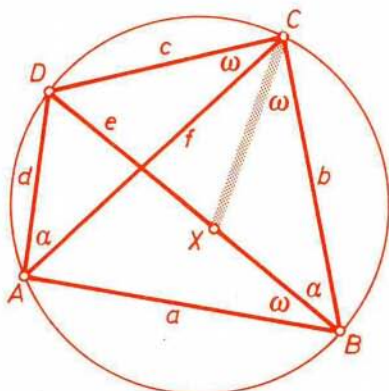
$$ac + bd = ef \quad (1)$$

če so stranice četverokotnika a, b, c in d ter diagonali e in f .

Tedaj smo spoznali, da lastnost (1) že določa tetivni četverokotnik. Tokrat pa si bomo ogledali elementarni dokaz Ptolemejevega izreka, ki ga najdemo v knjigi Franceta Križaniča *Nihalo, prostor in delci*. Problem je rešen, če v prvi potezi potegnemo pravo črto. Z daljico CX (skica 1) sestavimo trikotnik XBC , ki ima ob vrhu C isti kot kot trikotnik DAC . Kot ob B v prvem trikotniku je enak kotu ob A v drugem, saj sta to obodna kota nad istim lokom. Trikotnika sta podobna, zato velja: $|BC| : |AC| = |BX| : |AD|$. Tudi trikotnika ABC in DXC sta podobna. Kota ob C sta očitno enaka, kot ob X v trikotniku DXC pa je zunanji kot trikotnika XBC in je enak vsoti $a + \omega$. Torej lahko zapišemo: $|DC| : |AC| = |DX| : |AB|$. Odtod dobimo: $|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BX|$ in $|AB| \cdot |DC| = |AC| \cdot |DX|$. Seštejemo in upoštevamo, da je $|BX| + |XD| = |BD|$. Dobimo

$$|AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$

in Ptolemejev izrek je dokazan.



Slika 1

France Križanič v omenjeni knjigi pravkar dokazani izrek takoj uporabi. Zasludjmo ga, saj nam bo gotovo pokazal kaj zanimivega.

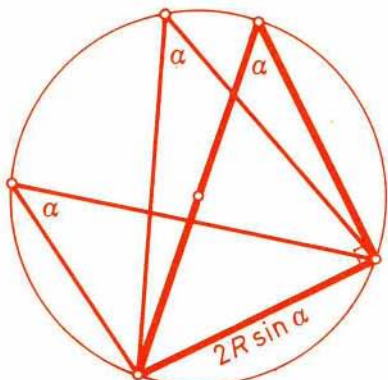
Znano je, da je dolžina tetive d odvisna le od obodnega kota α in polmera r (slika 2):

$$d = 2r \sin \alpha$$

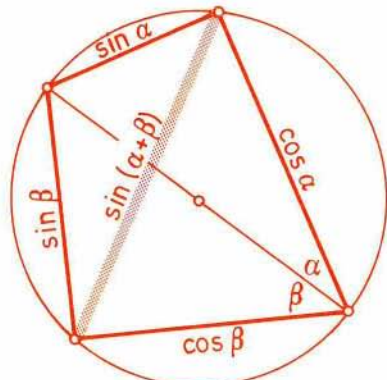
Narišimo sedaj krožnico s premerom 1 in ji včrtajmo četverokotnik, ki ima premer za diagonalo (slika 3). Diagonala razdeli kot ob izbranem vrhu v dva kota α in β . Z njima izrazimo vse štiri stranice. Druga diagonala je $\sin(\alpha + \beta)$. Po Ptolemejevem izreku velja:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

To pa je dobro znani adicijski izrek za funkcijo sinus.



Slika 2



Slika 3

Primer 1. Dokaži, da je dolžina diagonale v pravilnem petkotniku s stranico a enaka $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Rešitev: Štiri oglišča petkotnika tvorijo enakokraki trapez. Dolžina diagonale v trapezu naj bo x , dolžina kraka je a , osnovnici pa sta dolgi x in a . Če uporabimo Ptolemejev izrek za ta trapez, dobimo:

$$x^2 = a^2 + ax$$

Izraz preoblikujemo v $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, oziroma $(x - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{5}}{2})^2$. Po korenjenju je za nas zanimiva samo rešitev $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Primer 2. Nad hipotenuzo BC pravokotnega trikotnika ABC nariši kvadrat. Naj bo vsota dolžin obeh katet enaka m . Določi razdaljo med središčem kvadrata O in ogliščem A .

